

Математическая логика и алгоритмы (2012)

Программа экзамена

Логика предикатов

1. Сигнатура 1-го порядка. Термы, атомарные формулы, формулы. Вхождение буквы в слово. Свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Замкнутые термы и формулы.
2. Интерпретация сигнатуры (в другой терминологии - модель; структура). Нормальная интерпретация сигнатуры с равенством. Расширенная сигнатура. Оцененные термы и формулы. Значения оцененных термов и формул в интерпретации. Общезначимость и выполнимость замкнутых формул.
3. Гомоморфизм и изоморфизм интерпретаций. "Сохранение" значений: оцененных термов при гомоморфизме, оцененных формул без равенства при сюръективном гомоморфизме, оцененных формул с равенством при изоморфизме.
4. Композиция гомоморфизмов. Изоморфность интерпретаций.
5. Определимые (выразимые) в данной интерпретации предикаты и отношения; их инвариантность при автоморфизмах.
6. Элементарная теория интерпретации. Элементарная эквивалентность. Элементарная эквивалентность изоморфных структур.
7. Теории 1-го порядка. Модель теории. Выполнимые теории. Сильно категоричные теории. Теорема о сильной категоричности элементарной теории конечной структуры в конечной сигнатуре (с равенством); ее обобщение для произвольных сигнатур.
8. Подстановка терма вместо переменной в терм и формулу. Коллизия переменных. Свободная подстановка.
9. Исчисление предикатов 1-го порядка в данной сигнатуре без равенства. Схемы аксиом и правила вывода. Доказательство (вывод) из множества гипотез. Выводимость. Теоремы исчисления предикатов и теорий 1-го порядка.
10. (Мета)теорема о дедукции для исчисления предикатов [в лекциях не доказывалась, но на экзамене нужно знать доказательство].
11. Производные и допустимые правила в исчислении предикатов. Допустимость производных правил. Транзитивность выводимости.
12. Исчисление высказываний. Теорема о полноте для исчисления высказываний [в лекциях не доказывалась, но на экзамене нужно знать идею доказательства].
13. Лемма о тавтологиях для исчисления предикатов.
14. Вариант теоремы дедукции: сведение выводимости в конечной теории к выводимости в исчислении предикатов.
15. Примеры допустимых правил и теорем исчисления предикатов: правила Бернаиса, монотонности для кванторов, контрапозиции, силлогизма; взаимодействие кванторов с отрицанием.
16. Условие истинности для формулы с несколькими кванторами общности. Универсальное замыкание формулы. Эквивалентность различных его вариантов.
17. Определение общезначимости для формулы с параметрами. Равносильные (эквивалентные) формулы. Равносильность как отношение эквивалентности на формулах.

18. Общезначимость пропозициональных аксиом исчисления предикатов.
19. Лемма о сложной подстановке для термов.
20. Лемма о сложной подстановке для формул.
21. Общезначимость кванторных аксиом исчисления предикатов. Теорема корректности для исчисления предикатов.
22. Логическое (семантическое) следование. Теорема корректности для теорий 1-го порядка. Противоречивые теории. Непротиворечивость выполнимых теорий.
23. Исчисление предикатов с равенством. Усиление аксиом равенства для функциональных и предикатных символов (с заменой переменных на термы).
24. Нормальные интерпретации. Нормальная выполнимость и общезначимость. Нормальная общезначимость аксиом равенства. Нормальное логическое следование. Теорема корректности для теорий 1-го порядка с равенством. Непротиворечивость нормально выполнимых теорий.
25. Синтаксически полные теории. Свойства полных теорий.
26. Лемма Линденбаума о расширении непротиворечивой теории до полной.
27. Свойство Хенкина и \exists -полнота. Расширение непротиворечивой теории до непротиворечивой теории Хенкина.
28. Лемма о выполнимости полной и \exists -полной теории без равенства в счетной сигнатуре.
29. Теорема о выполнимости непротиворечивой теории без равенства в счетной сигнатуре. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства.
30. Теорема Гёделя о полноте для теорий без равенства: совпадение семантического и синтаксического следования. Теорема Лёвенгейма - Сколема для теорий без равенства в счетной сигнатуре.
31. Теорема о нормальной выполнимости непротиворечивой теории с равенством в счетной сигнатуре.
32. Теорема о нормальной выполнимости непротиворечивой теории с равенством в произвольной сигнатуре (формулировка и идея доказательства).
33. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством. Теорема Гёделя о полноте для теорий с равенством: совпадение нормального семантического и синтаксического следования. Теорема Лёвенгейма - Сколема для теорий с равенством.

Теория моделей

33. Теорема Гёделя - Мальцева о компактности для теорий с равенством. Признак существования бесконечной модели.
34. Теорема Лёвенгейма - Сколема "вверх" для теорий с равенством (слабая форма).
35. Категоричность в мощности κ . Признак полноты Тарского - Вота.
36. Примеры категоричных теорий: теория неограниченных плотных линейных порядков; теория делимых абелевых групп без кручения.
37. Диаграмма и элементарная диаграмма структуры. Вложение и элементарное вложение. Теорема Лёвенгейма - Сколема - Тарского "вверх" для теорий с равенством.
38. Универсальные формулы. Универсальный фрагмент теории. Лемма о моделях универсального фрагмента. Теорема Тарского - Лося.
39. Кванторный ранг. Простые формулы. Игры Эренфойхта: правила игры и выигрышные стратегии.

40. Игровые эквивалентности структур. Индуктивное определение игровых эквивалентностей.
41. Теорема Эрэнфойхта - Фраиссе: из игровой n -эквивалентности следует элементарная n -эквивалентность.
42. Признак n -эквивалентности в сигнатуре равенства. Конечные модели ("спектры") формул в сигнатуре равенства.
43. Критерий n -эквивалентности линейных порядков "по двум лучам".
44. Признак n -эквивалентности конечных линейных порядков. Финитная неэлементарность класса четных линейных порядков.
45. Дискретные линейные порядки. Признак n -эквивалентности дискретного и конечного линейных порядков.
46. Элементарная эквивалентность бесконечных дискретных линейных порядков с одинаковыми условиями ограниченности. Полнота теории неограниченных дискретных линейных порядков.
47. Критерий 0-эквивалентности кортежей в сигнатуре с 1-местными предикатами без равенства. Совпадение всех отношений n -эквивалентности кортежей в этой сигнатуре при $n > 0$.
48. Финитная выполнимость выполнимых формул в сигнатуре с 1-местными предикатами без равенства. Разрешимость исчисления предикатов в этой сигнатуре.
49. Доказательство теоремы Кантора о счетной категоричности теории неограниченных плотных линейных порядков с помощью бесконечной игры Эрэнфойхта.

Теория алгоритмов

50. Отношение m -сводимости на множествах слов в конечном алфавите; его свойства.
51. Перечислимость множества теорем перечислимой теории в конечной сигнатуре.
52. Разрешимость полной перечислимой теории в конечной сигнатуре.
53. Кодирование работы машины Тьюринга с помощью формулы 1-го порядка.
54. Теорема Трахтенброта о неразрешимости финитной выполнимости.
55. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов в подходящей сигнатуре.

Формальная арифметика

56. Сигнатура арифметики. Нумералы. Арифметика Робинсона, арифметика Пеано; их непротиворечивость. Истинная арифметика.
57. Арифметические теории. Представимость тотальных вычислимых функций (без док.).
58. Арифметические множества. Арифметичность перечислимых множеств натуральных чисел.
59. Неперечислимость истинной арифметики. 1-я теорема Гёделя о неполноте.
60. Гёделевская нумерация арифметических формул. Теорема Клини - Фефермана о неподвижной точке.
61. Существенная неразрешимость арифметики (теорема Тарского - Мостовского - Робинсона).
62. Теорема Тарского "о невыразимости истины". Неарифметичность истинной арифметики.
63. Формальная доказуемость в арифметической теории. Формальная непротиворечивость. 2-я теорема Гёделя о неполноте.

Аксиоматическая теория множеств

64. "Наивная" теория множеств; ее противоречивость (парадокс Рассела).
65. Включение множеств. Аксиома объемности. Аксиома пары. Единственность пары. Упорядоченная пара.
66. Аксиома пустого множества; его единственность. Аксиома объединения. Аксиома степени (множества подмножеств).
67. Сокращенная запись формул с использованием "классов". Подкласс. Пересечение и объединение двух классов. Универсальный класс V . Объединение класса X ; пересечение класса X . Схема аксиом выделения. Подкласс множества - множество; пересечение непустого класса - множество. Собственные классы. Собственность класса V .
68. Индуктивные множества. Аксиома бесконечности. Множество натуральных чисел ω ; его индуктивность. Принцип индукции для натуральных чисел.
69. Транзитивные множества. Транзитивность натуральных чисел. Транзитивность ω .
70. Из двух натуральных чисел одно не принадлежит другому. Единственность предыдущего числа.
71. Декартово произведение классов. Функция-класс. Образ класса X при функции F . Аксиома подстановки.