

# Математическая логика и алгоритмы

(весна 2020)

## Содержание лекций

### Лекция 1 (11.2) Предварительные определения и утверждения (формулировки).

1. Сравнение мощностей. Теорема Кантора — Бернштейна.
  2. Конечные и бесконечные множества. Теорема о счетном подмножестве. Следствие: бесконечное подмножество  $\mathbf{N}$  счетно. Теорема о сравнении мощностей.
  3. Произведение и сумма мощностей. Множества  $A^n$ ,  $A^*$ . Основная теорема арифметики мощностей. Следствие:  $|A^*|=|A|$  для бесконечного  $A$ .
  4. Сигнатура. Термы и формулы данной сигнатуры.
  5. Модель данной сигнатуры. Нормальная модель сигнатуры с равенством.
  6. Оцененные термы и формулы. Значения оцененных термов и формул в модели.
  7. Теория. Выполнимость, общезначимость. Логическое следование. Элементарная теория модели. Элементарная эквивалентность моделей.
  8. Исчисление предикатов  $PC_\Omega$ ; аксиомы и правила вывода. Вывод в исчислении предикатов из множества формул  $\Gamma$ .
  9. Некоторые теоремы и допустимые правила в  $PC_\Omega$ :
    - (1)  $\vdash_{CL} A(P_1, \dots, P_n) \Rightarrow \vdash_{PC_\Omega} A(B_1, \dots, B_n)$
    - (2)  $\forall x [x/a] A \rightarrow A, A \rightarrow \exists x [x/a] A$
    - (3)  $\exists y [y/a] A \rightarrow \exists x [x/a] A$
    - (4)  $\vdash A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow \vdash A \rightarrow C$  (правило силлогизма)
    - (5) Правила Бернаиса: при  $x \notin V, a \notin A$   
 $\vdash A \rightarrow B \Rightarrow \vdash A \rightarrow \forall x [x/a] B,$   
 $\vdash B \rightarrow A \Rightarrow \vdash \exists x [x/a] B \rightarrow A$
10. Теорема дедукции:  $\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$  (где  $A$  замкнутая).  
Следствие: для конечной теории  $T$   
 $T \vdash A \Leftrightarrow \vdash (\bigwedge T) \rightarrow A$
11. Теорема корректности для исчисления предикатов.
  - (1)  $T \vdash_{PC_\Omega} A \Rightarrow T \models \bar{\forall} A$
  - (2)  $\vdash_{PC_\Omega} A \Rightarrow \models A$
12. Противоречивая теория. Выполнимость  $\Rightarrow$  непротиворечивость.

### Лекция 2 (18.2)

1. Лемма о новой константе.
2. Свидетели. Теория Хенкина. Лемма о добавлении свидетеля.
3. Лемма Хенкина: расширение непротиворечивой теории до непротиворечивой теории Хенкина.
4. Максимальная непротиворечивая теория. Лемма Линденбаума: расширение непротиворечивой теории до максимальной.

### Лекция 3 (25.2)

1. Свойства максимальных теорий: согласование принадлежности с логическими связками.
2. Построение модели максимальной непротиворечивой теории Хенкина.
3. Выполнимость непротиворечивой теории.
4. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.
5. Теорема компактности.
6. Теорема Лёвенгейма — Сколема.
7. Повторение: стандартные теории равенства; лемма о нормализации.

### Лекция 4 (3.3)

1. Исчисление предикатов с равенством. Нормальная выполнимость непротиворечивой теории с равенством.
2. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов с равенством.
5. Теорема компактности для теорий с равенством.
6. Теорема Лёвенгейма — Сколема для теорий с равенством.
7. Теорема о повышении мощности для теории с равенством: (1) для теории с конечными моделями; (2) для теории с бесконечной моделью.
8. Полные теории. Категоричность теории в данной мощности.
9. Признак полноты Лося — Вота.
10. Пример теории, категоричной в любой бесконечной мощности:  $\text{Th}(\mathbf{N},=)$ .
11. Теория  $\text{DLO}_{\leftrightarrow}$  неограниченных плотных линейных порядков. Ее счетная категоричность (теорема Кантора).
12. Лексикографическое произведение линейных порядков. Некатегоричность  $\text{DLO}_{\leftrightarrow}$  в несчетных мощностях.