Математическая логика и алгоритмы (весна 2020)

В.Б. Шехтман

Лекция 2

Теории Хенкина

Наша следующая цель — доказательство теоремы Гёделя о полноте (1929):

$$T \vDash A \Rightarrow T \vdash A.$$

Для этого достаточно построить модель любой непротиворечивой теории. Для построения модели используем метод Хенкина – Хазенъегера, изобретенный в 1940-е гг.

Лемма 2.1 (лемма о новой константе) *Пусть $A(c)$ — формула сигнатуры Ω, в которую входит константа c (и, возможно, другие константы). Пусть T — теория в сигнатуре Ω, в аксиомах которой c не встречается, и пусть $T \vdash_{PC_\Omega} A(c)$. Пусть a - свободная переменная, которая не встречается в этом доказательстве. Тогда $T \vdash_{PC_\Omega} A(a)$, и следовательно, $T \vdash_{PC_\Omega} \forall z A(z)$, где z - связанная переменная, не входящая в A.*

Примечание. $A(a)$ получается из $A(c)$ заменой всех вхождений c на a, т.е. $A(a) = [a/c]A(c)$. Аналогично, $A(z) = [z/c]A(c)$.

Доказательство Докажем, что $T \vdash A(a)$ индукцией по длине вывода $A(c)$.

1. Если $A(c)$ — подстановочный пример аксиомы CL, то и $A(a)$ — пример той же аксиомы. Действительно, если $A(c) \doteq F(B_1(c), \ldots, B_n(c))$, где

$F(P_1, \dots, P_n)$ — пропозициональная формула (аксиома), $B_1(c), \dots, B_n(c)$ — формулы 1-го порядка, то $A(a) \doteq F(B_1(a), \dots, B_n(a))$.[1]

2. Если $A(c)$ — аксиома II.3, то

$$A(c) \doteq \forall x(C(c) \to [x/b]B(b,c)) \to (C(c) \to \forall x[x/b]B(b,c)),$$

b не входит в $C(c)$. Можем считать, что b не совпадает с a — иначе построим эту же формулу с помощью другой переменной b', не входящей в $C(c)$:

$$A(c) \doteq \forall x(C(c) \to [x/b']B(b',c)) \to (C(c) \to \forall x[x/b']B(b',c)).$$

Поэтому

$$A(a) \doteq \forall x(C(a) \to [x/b]B(b,a)) \to (C(a) \to \forall x[x/b]B(b,a))$$

— тоже аксиома II.3.

Аналогично поступаем с II.4.

3. Пусть $A(c)$ — аксиома II.1:

$$A(c) \doteq \forall x[x/b]B(b,c) \to [t(c)/b]B(b,c),$$

где (как и в предыдущем случае) b отлична от a. Запишем это же более привычным способом:

$$A(c) \doteq \forall x B(x,c) \to B(t(c),c).$$

В B и t могут входить свободные переменные, которые здесь не указаны (но a туда не входит, по предположению). Тогда[2]

$$A(a) \doteq \forall x B(x,a) \to B(t(a),a).$$

Это тоже аксиома II.1.

Аналогично действуем с II.2.

4. Если $A(c)$ получается по MP из $B(c)$, $B(c) \to A(c)$, то выводы этих формул короче. По предположению индукции, $T \vdash B(a)$, $B(a) \to A(a)$. Тогда $T \vdash A(a)$ по MP.

[1] Какие-то формулы $B_i(c)$ могут и не содержать c. Тогда $B_i(a) \doteq B_i(c)$ не содержит a.

[2] На самом деле здесь используется следующий достаточно очевидный факт: $[a/c]([t/b]\Phi) \doteq [([a/c]t)/b]([a/c]\Phi)$, где a, b — свободные переменные, c — константа, t — терм, Φ — терм или формула. Точное доказательство проводится индукцией по длине Φ.

5. Пусть $A(c)$ получается по Gen, т.е. для некоторой формулы $B(b,c)$ имеем $T \vdash B(b,c)$, $A \doteq \forall y B(y,c)$, причем b не равно a (по выбору a). По предположению индукции, тогда $T \vdash B(b,a)$. Тогда по Gen, $T \vdash \forall y B(y,a) \doteq A(a)$.

Других вариантов нет: $A(c) \notin T$ по условию леммы. ■

Определение 1 *Константа c называется* свидетелем *для замкнутой формулы $\exists x A(x)$ в теории T, если $T \vdash \exists x A(x) \to A(c)$. T называется* теорией Хенкина*, если в T есть свидетели для всех замкнутых формул, начинающихся с $\exists$.*

Лемма 2.2 *Если теория T непротиворечива, $\exists x A(x)$ — замкнутая формула в ее сигнатуре, c — константа, которая не встречается в T, то теория $T \cup \{\exists x A(x) \to A(c)\}$ непротиворечива.*

Доказательство Рассуждаем от противного. Если $T \cup \{\exists x A(x) \to A(c)\}$ противоречива, то $T \vdash \neg(\exists x A(x) \to A(c))$. Тогда $T \vdash \exists x(x), \neg A(c)$ (поскольку $\neg(B \to C) \vdash_{CL} B, \neg C$). По лемме 2.1, из $T \vdash \neg A(c)$ следует $T \vdash \forall x \neg A(x)$. В PC мы имеем $\vdash \forall x \neg A(x) \to \neg \exists x A(x)$ (упражнение на семинарах). Отсюда по MP $T \vdash \neg \exists x A(x)$. Но $T \vdash \exists x A(x)$ — следовательно, T противоречива. ■

Определение 2 *Мощность сигнатуры Ω (обозначается $|\Omega|$) — это мощность множества всех ее символов или $\aleph_0$, если сигнатура конечна.*

Лемма 2.3 $|\Omega| = |CFm_\Omega|$.

Доказательство Из теории множеств известно[3], что для бесконечного X, $|X| = |X^*|$, где * — множество всех слов (конечных последовательностей), построенных из элементов X.

Формулы - это слова, построенные из символов Ω, и еще счетного множества символов (переменных, связок, кванторов, запятых, скобок). Т.е. в итоге используется множество X, мощности [4] $|\Omega|$. Таким образом, $|CFm_\Omega| \leq |Fm_\Omega| \leq |\Omega|$.

И ясно, что $|\Omega| \leq |CFm_\Omega|$: разным символам Ω можно поставить в соответествие разные замкнутые формулы. Например, произвольному предикатному символу P^n — формулу $\exists y P^n(y, ..., y)$ (где y — фиксированная свя-

[3] При этом нужна аксиома выбора.

[4] Здесь снова нужна аксиома выбора.

занная переменная), константе c — формулу $Q^m(c, ..., c)$ (где Q^m — фиксированный предикатный символ), функциональному символу f^k — формулу $\exists y Q^m(f^k(y, ..., y), y..., y)$ (где Q^m — фиксированный предикатный символ, y — фиксированная связанная переменная). Тогда по теореме Кантора – Бернштейна, для бесконечной Ω получаем $|\Omega| = |CFm_\Omega|$.

Если же Ω конечно, то CFm_Ω счетно: достаточно взять одну замкнутую формулу и построить из нее $\neg A$, $\neg\neg A$, $\neg\neg\neg A$,... Тогда по теореме Кантора – Бернштейна CFm_Ω счетно. ■

Лемма 2.4 *(Лемма Хенкина) Пусть* Γ *— непротиворечивая теория в сигнатуре* Ω. *Тогда существует непротиворечивая теория Хенкина* $\Gamma' \supset \Gamma$ *в сигнатуре* Ω', *где* $|\Omega'| = |\Omega|$.

Доказательство Для каждой замкнутой формулы вида $\exists x A(x)$ вводим новую константу c_A. Пусть

$$\Gamma_1 := \Gamma \cup \{\exists x A(x) \to A(c_A) \mid \exists x A(x) \in CFm_\Omega\}.$$

Утверждение Γ_1 непротиворечива.

Действительно, иначе была бы противоречива ее конечная подтеория, которая содержится в теории вида

$$\Gamma \cup \{\exists x_1 A_1(x_1) \to A_1(c_{A_1}), \dots, \exists x_n A_n(x_n) \to A_n(c_{_n})\}.$$

Но последняя теория непротиворечива по лемме 2.2, примененной n раз. Утверждение доказано.

Теперь по индукции определим теории Γ_n: $\Gamma_0 := \Gamma$, $\Gamma_{n+1} := (\Gamma_n)_1$. Из доказанного утверждения следует их непротиворечивость (также по индукции).

Заметим, что $|\Gamma_1| = |\Omega|$: мы добавили констант столько же, сколько замкнутых формул вида $\exists x A(x)$. Они образуют подмножество CFm_Ω, равномощное CFm_Ω, т.к. из любой замкнутой формулы B можно построить замкнутую формулу $\exists x B$ и следовательно, CFm_Ω вкладывается в множество всех замкнутых формул, начинающихся с $\exists$.

По индукции получаем, что сигнатура Γ_n (обозначим ее Ω_n) равномощна Ω.

Наконец, полагаем $\Gamma' := \bigcup\limits_{n \geq 0} \Gamma_n$. Эта теория непротиворечива: иначе противоречие выводится в ее конечной подтеории, которая содержится в каком-то Γ_n (это следует, из того, что Γ_n образуют возрастающую последовательность).

Γ' — теория Хенкина. Действительно, замкнутая формула $\exists x A(x)$ в ее сигнатуре содержит конечное число новых констант, поэтому попадает в какую-то Ω_n. По построению, у нее есть свидетель в Γ_{n+1}, а потому и в Γ'.

Сигнатура Ω' теории Γ' получается как объединение всех Ω_n. Если Ω бесконечна, то они равномощны Ω, и

$$|\Omega| \leq |\Omega'| \leq |\Omega| \cdot \aleph_0 = |\Omega|.$$

Если Ω конечна, то все они счетны и их счетное объединение — тоже. В любом случае $|\Omega'| = |\Omega|$. ■