ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
к курсу "Математическая логика и алгоритмы" (2016)

Соглашения

Для теорий с равенством рассматриваются только нормальные модели

Теории в одной сигнатуре называются *эквивалентными,*. если в них выводимы одни и те же формулы.

Теория Δ называется *расширением* теории Γ той же сигнатуры, если в ней выводимы все теоремы Γ.

1. Проверьте общезначимость в шкалах Крипке аксиомы $\neg A \to (A \to B)$.
2. Докажите, что формула $(p \to q) \vee (q \to p)$ (где p, q — пропозициональные переменные) истинна в линейно упорядоченных моделях Крипке, но невыводима в IL.
3. Докажите, что формула $\neg p \vee \neg\neg p$ (где p — пропозициональная переменная) невыводима в IL.
4. Докажите, что если $\vdash_{CL} A$, то $\vdash_{IL} \neg\neg A$ (теорема Гливенко)
5. Докажите выводимость в исчислении предикатов следующих формул:

а) $\forall x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$ если x не свободен в α.

б) $\exists x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$, если x не свободен в α.

в) $(\forall x\, \alpha \,\&\, \forall x\, \beta) \leftrightarrow \forall x\, (\alpha \,\&\, \beta)$

г) $\exists y \forall x\, \alpha \to \forall x \exists y\, \alpha$

6. Докажите, что следующие формулы (где P,Q,R — предикатные символы) не выводятся в исчислении предикатов:

а) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$

б) $\forall x \exists y\, P(x,y) \to \exists y \forall x\, P(x,y)$

в) $(\exists x\, R(x) \,\&\, \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (R(x) \,\&\, Q(x))$

7. Постройте замкнутые формулы α, β, в сигнатуре {=}, для которых ни одна из формул $\alpha \,\&\, \beta$, $\neg\alpha \,\&\, \beta$, $\alpha \,\&\, \neg\beta$, $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta$ не выводится в исчислении предикатов с равенством.

8. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

9. Докажите, что если формула в сигнатуре без равенства, констант и функциональных символов имеет 2-элементную модель, то она имеет и 3-элементную модель

10. Рассмотрим сигнатуру абелевых групп: (0, + , –, =) (где 0 - константа, + - 2-местный функциональный символ, – - 1-местный функциональный символ).

Докажите, что в этой сигнатуре

а) $\mathbf{Z}$ не элементарно эквивалентно $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

б) $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ не элементарно эквивалентно $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

11. Докажите, что в сигнатуре, состоящей из конечного числа одноместных предикатов и равенства всякая теория имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных моделей.

12. Докажите, что если теория в конечной сигнатуре с равенством имеет бесконечную нормальную модель, то она имеет и счетную нормальную модель.

13. Докажите, что теория в сигнатуре с одним 2-местным предикатным символом R, равенством и двумя аксиомами:

$\forall x \, \forall y \, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$, $\forall x \, R(x,x)$

имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.

14. Докажите, что класс всех абелевых групп без кручения (в сигнатуре абелевых групп) *неэлементарен* (т.е. не является классом всех моделей некоторой формулы).

15. Пусть Г – полная теория с равенством, имеющая конечную нормальную модель. Докажите, что Г не имеет бесконечных нормальных моделей.

16. Докажите, что класс всех полей конечной характеристики не является классом всех моделей никакой теории (т. е. не является пересечением элементарных классов).

17. Аналогичная задача для класса всех циклических групп.

18. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} полна. Постройте какую-нибудь систему аксиом этой теории.

19. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} не является конечно аксиоматизируемой.

20. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} разрешима.

21. Докажите, что теория всех конечных множеств в сигнатуре {=} эквивалентна исчислению предикатов в этой сигнатуре.

22. Докажите, что теория полей нулевой характеристики в сигнатуре колец не является конечно аксиоматизируемой.

23. Докажите, что теория упорядоченного множества рациональных чисел на отрезке [0,1] полна.

24. Докажите, что для любой теории Г и формулы φ в ее сигнатуре:

$\Gamma \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда φ выводится во всех полных расширениях Г.

25. Докажите, что если теория первого порядка Г в конечной сигнатуре имеет конечное число полных расширений и все они перечислимы, то Г разрешима.

26. Найдите все полные расширения теории плотных линейно упорядоченных множеств.

27. Докажите, что теория плотных линейно упорядоченных множеств разрешима.

28. Докажите, что если теория первого порядка в конечной сигнатуре не имеет бесконечных моделей, то она разрешима.

29. Группа называется периодической с периодом p (где p — простое число), если всякая ее нетривиальная циклическая подгруппа имеет порядок p. Докажите, что теория всех бесконечных абелевых групп периода p в сигнатуре (+,-,0) счетно категорична.

30. Докажите, что теория всех бесконечных абелевых групп периода p в сигнатуре (+,-,0). разрешима.

31. Докажите следующие теоремы в PA:

а) если сумма двух чисел равна 0, то они оба равны 0,

б) если произведение двух чисел не равно 0, то они оба не равны 0.

32. Докажите, что теория Q не имеет конечных моделей.

33. В сигнатуре арифметики определим $x \leq y := \exists z\,(x+z=y)$

Докажите, что если $m \leq n$, то $Q \vdash \bar{m} \leq \bar{n}$.

34. Докажите, что исчисление предикатов в сигнатуре $\{=\}$ разрешимо.

35. Сколько имеется попарно неэквивалентных теорий в сигнатуре $\{=\}$?

36. Используя стандартную модель, докажите, что теория PA+ Con PA непротиворечива.