Математическая логика и алгоритмы (2016)

Программа экзамена

Логика высказываний

1. Пропозициональные формулы. 2-значные оценки пропозициональных переменных. Продолжение оценок на все формулы. Тавтологии.
2. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний (CL) и интуиционистского исчисления высказываний (IL).
3. Вывод (формальное доказательство) в исчислении высказываний. Выводимая формула (теорема).
4. Вывод формулы $A \to A$.
5. Вывод из множества гипотез. Теорема дедукции для CL и IL.
6. Теорема корректности для CL. Непротиворечивость CL.
7. Теорема о (семантической) полноте CL. Ее доказательство с помощью СДНФ.
8. Примеры рассуждений в IL. Транзитивность выводимости. Доказательство от противного. Разбор случаев. Добавление двойного отрицания.
9. Шкала Крипке. Модель Крипке. Истинность формулы в точке ("мире") модели Крипке. Принцип сохранения истинности.
10. Теорема корректности IL в семантике Крипке.
11. Недоказуемость закона исключенного третьего $(p \vee \neg p)$ в IL. Теорема о полноте IL в семантике Крипке (формулировка).
12. Неполнота IL относительно одной конечной шкалы Крипке.

Логика предикатов

13. Сигнатура 1-го порядка. Термы, атомарные формулы, формулы. Вхождение буквы в слово. Свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Замкнутые термы и формулы.
14. Интерпертация сигнатуры (в другой терминологии - модель; структура). Нормальная модель сигнатуры с равенством. Расширенная сигнатура. Оцененные термы и формулы. Значения оцененных термов и формул в модели. Общезначимость и выполнимость замкнутых формул.
15. Теории 1-го порядка. Модель теории. Выполнимые теории. Примеры теорий.
16. Гомоморфизм и изоморфизм моделей. "Сохранение" значений: оцененных термов при гомоморфизме, оцененных формул при сюръективном гомоморфизме.
17. Композиция гомоморфизмов. Изоморфность моделей.
18. Определимые (выразимые) в данной интерпретации предикаты и отношения; их инвариантность при автоморфизмах.
19. Элементарная теория интерпретации. Элементарная эквивалентность. Элементарная

эквивалентность изоморфных моделей.

20. Сильно категоричные теории. Теорема о сильной категоричности элементарной теории конечной модели в конечной сигнатуре (с равенством).
21. Подстановка терма вместо переменной в терм и формулу. Коллизия переменных. Свободная подстановка.
22. Исчисление предикатов 1-го порядка в данной сигнатуре без равенства. Схемы аксиом и правила вывода. Доказательство (вывод) из множества гипотез. Выводимость. Теоремы исчисления предикатов и теорий 1-го порядка.
23. Транзитивность выводимости. (Мета)теорема о дедукции для исчисления предикатов. Связь между выводимостью в конечной теории и выводимостью в исчислении предикатов.
24. Производные и допустимые правила в исчислении предикатов. Допустимость производных правил.
25. Примеры допустимых правил и теорем исчисления предикатов: правила Бернайса, монотонности для кванторов, контрапозиции, силлогизма; снятие двойного отрицания, переименование связанной переменной, взаимодействие кванторов с отрицанием, перестановка одноименных кванторов.
26. Условие истинности для формулы с несколькими кванторами общности. Универсальное замыкание формулы. Определение общезначимости для формулы с параметрами. Равносильные (эквивалентные) формулы.
27. Общезначимость пропозициональных аксиом исчисления предикатов.
28. Лемма о двойной подстановке для термов
29. Лемма о двойной подстановке для формул.
30. Общезначимость кванторных аксиом исчисления предикатов. Теорема корректности для исчисления предикатов без равенства.
31. Логическое (семантическое) следование. Теорема корректности для теорий первого порядка. Противоречивые теории. Непротиворечивость выполнимых теорий.
32. Исчисление предикатов с равенством. Следствие из аксиом равенства: замена термов на равные. Нормальные интерпретации. Нормальная выполнимость и общезначимость. Нормальная общезначимость аксиом равенства.
33. Нормальное логическое следование. Теорема корректности для теорий 1-го порядка с равенством. Непротиворечивость нормально выполнимых теорий.
34. Полные теории. Свойства непротиворечивых полных теорий.
35. Лемма Линденбаума о расширении непротиворечивой теории до полной.
36. Лемма о свежей константе.

37. Свидетели и теории Хенкина. Расширение непротиворечивой теории до непротиворечивой теории Хенкина.
38. Теорема о выполнимости непротиворечивой теории без равенства в счетной сигнатуре.
39. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства.
40. Теорема Гёделя о полноте для теорий без равенства: совпадение семантического и синтаксического следования. Теорема Лёвенгейма - Сколема для теорий без равенства в счетной сигнатуре.
41. Лемма о «нормализации» модели аксиом равенства.
42. Теорема о нормальной выполнимости непротиворечивой теории с равенством в счетной сигнатуре.
43. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством. Теорема Гёделя о полноте для теорий с равенством: совпадение нормального семантического и синтаксического следования. Признак полноты теории: элементарная эквивалентность ее моделей.
44. Теорема Лёвенгейма - Сколема для теорий с равенством.
45. Теорема Гёделя - Мальцева о компактности для теорий с равенством.
46. Признак существования бесконечной модели («теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности»).
47. Счетно категоричные теории. Признак полноты Вота. Примеры счетно категоричных теорий: теория неограниченных плотных линейных порядков; теория бесконечных множеств в сигнатуре равенства.

Формальная арифметика и вычислимость

48. Сигнатура арифметики. Арифметика Робинсона, арифметика Пеано; их непротиворечивость. Истинная арифметика.
49. Нумералы. Некоторые теоремы арифметике Робинсона и Пеано: коммутативность сложения; неравенство разных нумералов.
50. Представимость функций в арифметических теориях (опеределение). Теорема о представимости вычислимых функций (формулировка).
51. Разрешимые и перечислимые множества слов. Перечислимость разрешимых множеств. Сохранение разрешимости для дополнений. Сохранение разрешимости для прообразов относительно вычислимых всюду определенных функций.
52. Арифметические множества. Арифметичность перечислимых множеств натуральных чисел.

53. Разрешимые и перечислимые теории. Перечислимость теории (в конечной сигнатуре) с разрешимым множеством аксиом.
54. Разрешимость полной перечислимой теории (в конечной сигнатуре).
55. Теорема об универсальной вычислимой функции. Построение перечислимого неразрешимого подмножества **N**.
56. Неперечислимость истинной арифметики. 1-я теорема Гёделя о неполноте.
57. Гёделевская нумерация арифметических формул. Диагональная лемма Клини — Фефермана.
58. Существенная неразрешимость арифметики (теорема Тарского - Мостовского - Робинсона).
59. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов.
67. Теорема Тарского "о невыразимости истины". Неарифметичность истинной арифметики.
68. Формальная доказуемость в арифметической теории. Формальная непротиворечивость. 2-я теорема Гёделя о неполноте.

Аксиоматическая теория множеств

64. Теория множеств Цермело без аксиомы выбора.
65. Индуктивные множества. Аксиома бесконечности. Множество натуральных чисел ω.
66. Арифметические свойства ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. http://www.mccme.ru

2. В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997. Физматлит, 2002.

3. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.

4. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.

5. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.

6. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.

7. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М., Мир, 1994.

8. Дж. Шенфилд. Математическая логика. М., Наука, 1975.
9. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
10. С.К. Клини. Введение в метаматематику. М., ИЛ, 1957.
11. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.