ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
к курсу "Математическая логика и алгоритмы" (2010)

1. Проверьте общезначимость в семантике Крипке аксиомы 9: $\neg A \to (A \to B)$.
2. Докажите, что теория графов в сигнатуре без равенства неполна.
3. Может ли полная теория в сигнатуре с равенством иметь нормальную конечную модель и нормальную бесконечную модель?
4. Докажите, что формула Даммета $(p \to q) \vee (q \to p)$ истинна в линейно упорядоченных моделях Крипке, но невыводима в IL.
5. Пусть T – полная теория с равенством, имеющая конечную модель. Докажите, что T не имеет бесконечных моделей.
6. Докажите, что не существует теории первого порядка в сигнатуре $\{+,\cdot,=,0,1\}$, моделями которой являются в точности все конечные поля. Аналогично -- для полей ненулевой характеристики.
7. Докажите, что формула $p \to \neg\neg p$ является теоремой IL.
8. Переведите в логическую символику и проверьте общезначимость полученной формулы:

В пьесе у каждого участника есть брат и сестра, также участвующие в этой пьесе. Никто не является своим собственным братом или сестрой. Брат не может быть сестрой. Значит, либо в этой пьесе нет вовсе действующих лиц, либо же их не меньше четырех.

9. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.
10. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.
11. Используя теорему о полноте, докажите, что формула $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$ является теоремой IL.
12. Докажите разрешимость множества всех четных чисел.
13. Докажите, что сложение натуральных чисел является вычислимой функцией.
14. Докажите разрешимость одноэлементного множества натуральных чисел.
15. Докажите, что если область определения вычислимой функции разрешима, то и ее график разрешим.
17. Докажите, что формула $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$ невыводима в исчислении предикатов.
18. Пусть $\varphi_n := \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_0 (x_0 \neq x_1 \wedge \ldots \wedge x_0 \neq x_n)$ (при n>0).

Докажите, что теория $T = \{\varphi_n \mid n>0\}$ полна (в сигнатуре с одним символом =).

19. Докажите, что если $\vdash_{CL} A$, то $\vdash_{IL} \neg\neg A$ (теорема Гливенко).

20. Докажите, что композиция вычислимых всюду определенных функций из **N** в **N** вычислима.

21. Докажите, что элементарная теория поля $\mathbb{Q}$ в сигнатуре $\{+,\cdot,=,0,1\}$ не является счетно категоричной.