Алгоритмическая выразительность неклассических предикатных логик, задаваемых классами шкал Крипке, не определимыми в логике первого порядка

Михаил Рыбаков
Тверской государственный университет

МГУ, 5 декабря 2018 года

Содержание

Мотивация

Пусть L — это одна из следующих пропозициональных логик: **GL**, **Grz**, **GL.3**, **Grz.3**, **PDL**, **CLT**, $\mathbf{CTL}^*$, $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{T}^*$; логика $\mathbf{K}_n$, $\mathbf{T}_n$, $\mathbf{K4}_n$ или $\mathbf{S4}_n$, обогащённая оператором всеобщего знания или универсальной модальностью.

Рассмотрим два способа построения предикатных вариантов логики L:

- множество формул, истинных в шкалах Крипке для L;
- множество формул, выводимых в исчислении $L \oplus \mathbf{QCL}$.

Известно, что

- в первом случае логика рекурсивно неперечислима;
- во втором случае логика не полна по Крипке.

Рассматриваемые вопросы

Основной вопрос

Каким условиям должен удовлетворять класс шкал Крипке, чтобы его логика была рекурсивно (не)перечислимой?

Вопросы, которые будут рассмотрены

- Какие условия второго порядка задают классы шкал, предикатные логики которых рекурсивно неперечислимы?
- Существуют ли полные по Крипке рекурсивно перечслимые предикатные логики, которые не полны относительно первопорядково определимых классов шкал?

Классическая логика предикатов

Формулы первого порядка:

$$\varphi ::= \bot | P_i^m(x_1, \ldots, x_m) | (\varphi \to \varphi) | (\forall x\ \varphi)$$

Модель классического языка

$\mathfrak{M} = \langle D, I \rangle$, где $D \neq \varnothing$, $I(P_i^m) = \boldsymbol{P}_i^m \subseteq D^m$.

Множество D называем предметной областью модели, I — интерпретацией предикатных букв.

$$\begin{array}{lcll} \textbf{QCL} & = & \{\varphi \in FO & : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для любой модели } \mathfrak{M}\}; \\ \textbf{QCL}^{=} & = & \{\varphi \in FO^{=} & : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для любой модели } \mathfrak{M}\}; \\ \textbf{QCL}_{fin} & = & \{\varphi \in FO & : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для любой конечной модели } \mathfrak{M}\}. \end{array}$$

Модальный предикатный язык

Модальные предикатные формулы:

$$\varphi ::= \bot \mid P_i^m(x_1, \ldots, x_m) \mid (\varphi \to \varphi) \mid (\forall x\ \varphi) \mid (\Box\varphi)$$

Используем обычные сокращения при записи формул:

$$\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & = & \varphi \to \bot; \\
\top & = & \neg\bot; \\
\varphi \vee \psi & = & \neg\varphi \to \psi; \\
\varphi \wedge \psi & = & \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi); \\
\varphi \leftrightarrow \psi & = & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi); \\
\Diamond\varphi & = & \neg\Box\neg\varphi; \\
\exists x\ \varphi & = & \neg\forall x\ \neg\varphi.
\end{array}$$

Шкалы Крипке

Шкала Крипке

$\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ where $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$.

Каждому миру w шкалы $\langle W, R \rangle$ сопоставим непустую предметную область $D(w)$; при этом должно выполняться следующее условие:

$$wRw' \Longrightarrow D(w) \subseteq D(w').$$

Предикатная шкала Крипке

$\mathfrak{F}_D = \langle W, R, D \rangle$.

Модели Крипке

Пусть I — интерпретация предикатных букв в шкале $\mathfrak{F}_D$, т.е.

$$I(P_i^m, w) = \boldsymbol{P}_{i,w}^m \subseteq (D(w))^m.$$

Модель Крипке

$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, I \rangle$.

Пусть $I_w(P_i^m) = I(P_i^m, w)$, $D_w = D(w)$. Тогда $\mathfrak{M}_w = \langle D_w, I_w \rangle$ — модель классического языка первого порядка.

Отношение истинности

Интерпретация предметных переменных

$g : x \mapsto g(x) \in D(w).$

$(\mathfrak{M}, w) \not\models^g \bot;$

$(\mathfrak{M}, w) \models^g P_i^m(x_1, \ldots, x_m) \leftrightharpoons \langle g(x_1), \ldots, g(x_m)\rangle \in I(P_i^m, w);$

$(\mathfrak{M}, w) \models^g (\varphi \to \psi) \leftrightharpoons (\mathfrak{M}, w) \not\models^g \varphi$ или $(\mathfrak{M}, w) \models^g \psi;$

$(\mathfrak{M}, w) \models^g (\Box\varphi) \leftrightharpoons$ для каждого мира $w' \in W$, такого, что wRw', имеем $(\mathfrak{M}, w') \models^g \varphi;$

$(\mathfrak{M}, w) \models^g (\forall x\, \varphi) \leftrightharpoons$ для любой g', такой, что $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D(w)$, имеем $(\mathfrak{M}, w) \models^{g'} \varphi.$

Отношение истинности

$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightharpoons (\mathfrak{M}, w) \models^g \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для любой g, такой, что $g(x_1), \ldots, g(x_n) \in D(w)$;

$\mathfrak{M} \models \varphi \leftrightharpoons (\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ для каждого $w \in W$;

$\mathfrak{F}_D \models \varphi \leftrightharpoons \mathfrak{M} \models \varphi$ для каждой $\mathfrak{M}$, определённой на $\mathfrak{F}_D$;

$\mathfrak{F} \models \varphi \leftrightharpoons \mathfrak{F}_D \models \varphi$ для каждой $\mathfrak{F}_D$, определённой на $\mathfrak{F}$;

$\mathfrak{C} \models \varphi \leftrightharpoons \mathfrak{F} \models \varphi$ для каждой $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}$.

Пусть $L(\mathfrak{C}) = \{\varphi : \mathfrak{C} \models \varphi\}$, т.е. $L(\mathfrak{C})$ — (нормальная) логика класса $\mathfrak{C}$.

Отношение истинности для шкал с выделенным миром

Шкалы и модели с выделенным миром (корнем)

$(\mathfrak{F}, w)$, $(\mathfrak{F}_D, w)$, $(\mathfrak{M}, w)$, где w — мир (корень) шкалы $\mathfrak{F}$.

$(\mathfrak{F}_D, w) \models \varphi \;\leftrightharpoons\;$ $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ для каждой $\mathfrak{M}$, определённой на $\mathfrak{F}_D$;

$(\mathfrak{F}, w) \models \varphi \;\leftrightharpoons\;$ $(\mathfrak{F}_D, w) \models \varphi$ для каждой $\mathfrak{F}_D$, определённой на $\mathfrak{F}$;

$\mathfrak{C}_p \models \varphi \;\leftrightharpoons\;$ $(\mathfrak{F}, w) \models \varphi$ для каждой $(\mathfrak{F}, w) \in \mathfrak{C}_p$.

Пусть $L(\mathfrak{C}_p) = \{\varphi : \mathfrak{C}_p \models \varphi\}$, т.е. $L(\mathfrak{C}_p)$ — (квазинормальная) логика класса $\mathfrak{C}_p$.

Первопорядковая определимость классов шкал

- Каждая шкала Крипке может быть рассмотрена как классическая модель (в языке с R и $=$).
- Класс шкал Крипке $\mathfrak{C}$ называется первопорядково определимым, если существует замкнутая классическая формула первого порядка в языке с буквами R и $=$, которая истинна в точности в шкалах из класса $\mathfrak{C}$.
- Класс шкал с выделенным миром $\mathfrak{C}_p$ называется первопорядково определимым, если существует имеющая одну свободную переменную классическая формула первого порядка в языке с буквами R и $=$, которая истинна в точности в шкалах из класса $\mathfrak{C}_p$.

Примеры: классы рефлексивных, иррефлексивных, симметричных, транзитивных шкал; любой класс из одной конечной шкалы.

Первопорядковая определимость и перечислимость

Наблюдение

- Если $\mathfrak{C}$ — первопорядково определимый класс, то логика $L(\mathfrak{C})$ рекурсивно перечислима.
- Если $\mathfrak{C}_p$ — первопорядково определимый класс, то логика $L(\mathfrak{C}_p)$ рекурсивно перечислима.

Идея доказательства. Используя стандартный перевод, можно $L(\mathfrak{C})$ и $L(\mathfrak{C}_p)$ погрузить в $\mathbf{QCL}^=$.

Верно ли обратное?

Первопорядковая определимость и перечислимость

Наблюдение

- Если $\mathfrak{C}$ — первопорядково определимый класс, то логика $L(\mathfrak{C})$ рекурсивно перечислима.
- Если $\mathfrak{C}_p$ — первопорядково определимый класс, то логика $L(\mathfrak{C}_p)$ рекурсивно перечислима.

Идея доказательства. Используя стандартный перевод, можно $L(\mathfrak{C})$ и $L(\mathfrak{C}_p)$ погрузить в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Верно ли обратное?

Неперечислимые логики

Наблюдение

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс шкал, такой, что:

- каждый мир каждой шкалы видит лишь конечное число миров;
- для каждого n имеется шкала и мир в ней, который видит не менее чем n миров.

Тогда логика $L(\mathfrak{C})$ не является рекурсивно перечислимой.

Идея доказательства. Используем формулы $\forall x \Diamond T(x)$ и $\forall x \forall y (x \approx y \leftrightarrow \Box(T(x) \leftrightarrow T(y)))$. Они позволяют разбить предметную область мира на классы эквивалентности, число которых не больше числа миров, достижимых из этого мира. За счёт этого можно погрузить неперечислимую логику $\mathbf{QCL}_{fin}$ в $L(\mathfrak{C})$.

Неперечислимые логики

Наблюдение

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс шкал, такой, что:

- каждый мир каждой шкалы видит лишь конечное число миров;
- для каждого n имеется шкала и мир в ней, который видит не менее чем n миров.

Тогда логика $L(\mathfrak{C})$ не является рекурсивно перечислимой.

Следствие. Логики классов конечных шкал логик **K**, **T**, **K4**, **S4**, **S5**, **GL**, **Grz** и др. не являются рекурсивно перечислимыми.

Замечание. Результат останется справедливым для случая постоянных областей.

Неперечислимые логики

Наблюдение

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс транзитивных шкал, такой, что:

- в шкалах нет бесконечных возрастающих цепей из попарно различных миров;
- для каждого n имеется цепь, содержащая не менее n попарно различных миров.

Тогда логика $L(\mathfrak{C})$ не является рекурсивно перечислимой.

Следствие. Логики классов шкал логик $\mathbf{GL}$, $\mathbf{Grz}$, $\mathbf{GL}.3$, $\mathbf{Grz}.3$ и др. не являются рекурсивно перечислимыми.

Следствие. Логики $\mathbf{GL} \oplus \mathbf{QCL}$, $\mathbf{Grz} \oplus \mathbf{QCL}$, $\mathbf{GL}.3 \oplus \mathbf{QCL}$, $\mathbf{Grz}.3 \oplus \mathbf{QCL}$ не полны по Крипке.

Интуиционистский случай

Известные факты

- Логика первопорядково определимого класса шкал рекурсивно перечислима.
- Логика класса конечных шкал не является рекурсивно перечислимой.
- Логики классов шкал без бесконечно возрастающих цепей и при этом со сколь угодно длинными цепями не являются рекурсивно перечислимыми.
- То же справедливо для случая расширений предикатных вариантов логик А.Виссера.
- То же справедливо для случая постоянных областей.

О числе предикатов и переменных

Известные факты

- классическая логика одноместных предикатов резрешима;
- классическая логика бинарного отношения неразрешима;
- классическая логика с двумя предметными переменными разрешима;
- классическая логика с тремя переменными неразрешима.

О числе предикатов и переменных

Известные факты

- стандартные модальные и суперинтуиционистские логики одноместного предиката нерезрешимы;
- стандартные модальные и суперинтуиционистские логики в языке с двумя предметными переменными неразрешимы;
- стандартные модальные и суперинтуиционистские логики в языке с одной предметной переменной разрешимы.

О числе предикатов и переменных

Полученные уточнения

- Модальные логики, содрежащиеся в **QGL**, **QGrz** или **QKTB**, неразрешимы в языке с одной одноместной предикатной буквой и двумя предметными переменными.
- Позитивные фрагменты расширений базисной логики А.Виссера, содержащиеся в формальной логике А.Виссера или в логике слабого закона исключённого третьего, неразрешимы в языке с одной одноместной предикатной буквой и двумя предметными переменными.
- Результаты справедливы как для случая расширяющихся, так и для случая постоянных предметных областей.

О числе предикатов и переменных

Полученные уточнения

- Модальные, суперинтуиционистские и виссеровские логики классов конечных шкал и классов шкал с условием обрыва возрастающих цепей (без ограничения на ширину и высоту) не являются рекурсивно перечислимыми в языке с одной одноместной предикатной буквой и тремя предметными переменными.
- Результаты справедливы как для случая расширяющихся, так и для случая постоянных предметных областей.

Вопрос о разделяющем примере

Вопрос

Существует ли класс $\mathfrak{C}$ шкал Крипке, такой, что логика $L(\mathfrak{C})$

- рекурсивно перечислима;
- не полна относительно первопорядково определимых классов [порождённых корневых] шкал?

Вопрос

Существует ли класс $\mathfrak{C}_p$ шкал, такой, что логика $L(\mathfrak{C}_p)$

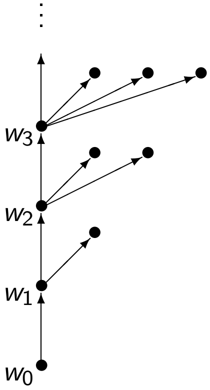
- рекурсивно перечислима;
- не полна относительно первопорядково определимых классов [порождённых корневых] шкал?

Далее будут представлены классы шкал, позволяющие ответить положительно на каждый из этих вопросов.

Квазинормальная логика корня шкалы

Определим шкалы $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ и шкалу $\mathfrak{F}$:

$$
\begin{array}{lcl}
W_0 & = & \{w_0\}; \\
R_0 & = & \varnothing; \\
W_{n+1} & = & W_n \cup \{w_{n+1}, v_1^{n+1}, \ldots, v_n^{n+1}\}; \\
R_{n+1} & = & R_n \cup \{\langle w_n, w_{n+1}\rangle\} \cup \\
 & & \{\langle w_n, v_k^{n+1}\rangle : k \in \{1, \ldots, n\}\}; \\
W & = & \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} W_n; \\
R & = & \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R_n.
\end{array}
$$



Пусть Log_1 — это множество формул, истинных в корне w_0 шкалы $\mathfrak{F}$.

Рекурсивная перечислимость логики Log_1

Пусть $md(\varphi)$ — модальная глубина формулы φ.

Пусть $Fr_n = \{\varphi \in Log_1 : md(\varphi) \leqslant n\}$.

Наблюдение

$Log_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Fr_n$. Значит, логика Log_1 рекурсивно перечислима, если фрагменты $Fr_1, Fr_2, Fr_3, \ldots$ рекурсивно перечислимы.

Наблюдение

Для каждого n фрагмент Fr_n рекурсивно перечислим, поскольку он погружается в $\mathbf{QCL}^=$.

[Доказательство в приложении]

Рекурсивная перечислимость логики Log_1

Пусть $md(\varphi)$ — модальная глубина формулы φ.

Пусть $Fr_n = \{\varphi \in Log_1 : md(\varphi) \leqslant n\}$.

Наблюдение

$Log_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Fr_n$. Значит, логика Log_1 рекурсивно перечислима, если фрагменты $Fr_1, Fr_2, Fr_3, \ldots$ рекурсивно перечислимы.

Наблюдение

Для каждого n фрагмент Fr_n рекурсивно перечислим, поскольку он погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

[Доказательство в приложении]

Рекурсивная перечислимость логики Log_1

Пусть $md(\varphi)$ — модальная глубина формулы φ.

Пусть $Fr_n = \{\varphi \in Log_1 : md(\varphi) \leqslant n\}$.

Наблюдение

$Log_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Fr_n$. Значит, логика Log_1 рекурсивно перечислима, если фрагменты $Fr_1, Fr_2, Fr_3, \ldots$ рекурсивно перечислимы.

Наблюдение

Для каждого n фрагмент Fr_n рекурсивно перечислим, поскольку он погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

[Доказательство в приложении]

О семантике Log_1

Предположим, $Log_1 = L(\mathfrak{C}_p)$, где $\mathfrak{C}_p$ — класс порождённых корневых шкал с выделенным корнем.

Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{F} : (\mathfrak{F}, w) \in \mathfrak{C}_p\}$.
Определим следующие формулы:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n^i & = & \Diamond(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_n); \\ \beta_n & = & \Box^n \neg(\alpha_{n+2}^1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n+2}^{n+2}). \end{array}$$

Наблюдение

Для любого n: $\beta_n \in Log_1$, $\Box\beta_n \notin Log_1$.

Следствие

Класс $\mathfrak{C}$ не является первопорядково определимым; а значит, и класс $\mathfrak{C}_p$ тоже.

О семантике Log_1

Предположим, $Log_1 = L(\mathfrak{C}_p)$, где $\mathfrak{C}_p$ — класс порождённых корневых шкал с выделенным корнем.

Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{F} : (\mathfrak{F}, w) \in \mathfrak{C}_p\}$.
Определим следующие формулы:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_n^i & = & \Diamond(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_n); \\ \beta_n & = & \Box^n \neg(\alpha_{n+2}^1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n+2}^{n+2}). \end{array}$$

Наблюдение

Для любого n: $\beta_n \in Log_1$, $\Box\beta_n \notin Log_1$.

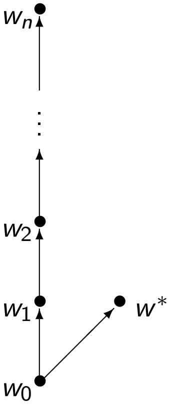
Следствие

Класс $\mathfrak{C}$ не является первопорядково определимым; а значит, и класс $\mathfrak{C}_p$ тоже.

Нормальные логики корневых шкал

Определим шкалы $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots$:

$$\begin{array}{lcl} W_1 & = & \{w_0, w_1, w^*\}; \\ R_1 & = & \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_0, w^*\rangle\}; \\ & & \\ W_{n+1} & = & W_n \cup \{w_{n+1}\}; \\ R_{n+1} & = & R_n \cup \{\langle w_n, w_{n+1}\rangle\}. \end{array}$$



Пусть Log_2 — это множество формул, истинных в классе $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{F}_{2k} : k > 0\}$.

Свойства логики Log_2

Утверждение

Логика Log_2 рекурсивно перечислима, т.к. погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Утверждение

Логика Log_2 не полна относительно первопорядково определимых классов порождённых корневых шкал Крипке.

Замечание

Существует первопорядково определимый класс шкал Крипке, относительно которого логика Log_2 полна.

Свойства логики Log_2

Утверждение

Логика Log_2 рекурсивно перечислима, т.к. погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Утверждение

Логика Log_2 не полна относительно первопорядково определимых классов порождённых корневых шкал Крипке.

Замечание

Существует первопорядково определимый класс шкал Крипке, относительно которого логика Log_2 полна.

Бимодальная логика Log_3

Пусть Log_3 — бимодальная логика класса шкал $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{F}_{2k} : k > 0\}$, где вторая модальность соответсвует отношениям R_{2k}^{-1}.

Утверждение

Логика Log_3 рекурсивно перечислима, т.к. погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Утверждение

Логика Log_3 не полна относительно первопорядково определимых классов шкал Крипке.

Бимодальная логика Log_3

Пусть Log_3 — бимодальная логика класса шкал $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{F}_{2k} : k > 0\}$, где вторая модальность соответсвует отношениям R_{2k}^{-1}.

Утверждение

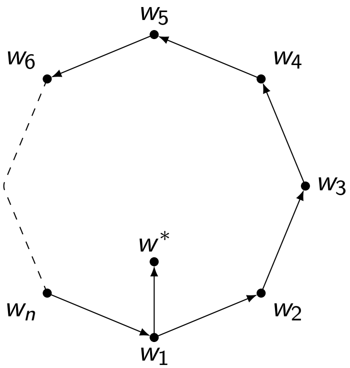
Логика Log_3 рекурсивно перечислима, т.к. погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Утверждение

Логика Log_3 не полна относительно первопорядково определимых классов шкал Крипке.

Модальная логика Log_4

Определим логику Log_4 как множество формул, истинных в шкалах следующего вида при чётных n:



Свойства логики Log_4

Утверждение

Логика Log_4 рекурсивно перечислима, т.к. погружается в $\mathbf{QCL}^{=}$.

Утверждение

Логика Log_4 не полна относительно первопорядково определимых классов шкал Крипке.

Открытые вопросы

Вопрос 1

Существуют ли аналогичные примеры в интуиционистском случае?

Вопрос 2

Существуют ли аналогичные примеры в случае рефлексивно-транзитивных (или хотя бы просто транзитивных) шкал?

Замечание. Аналог Log_4 возможен в рефлексивном случае.

Вопрос 3

Какова алгоритмическая выразительность логик конечных шкал при наличии в языке одной одноместной буквы и двух предметных переменных?

Открытые вопросы

Вопрос 1

Существуют ли аналогичные примеры в интуиционистском случае?

Вопрос 2

Существуют ли аналогичные примеры в случае рефлексивно-транзитивных (или хотя бы просто транзитивных) шкал?

Замечание. Аналог Log_4 возможен в рефлексивном случае.

Вопрос 3

Какова алгоритмическая выразительность логик конечных шкал при наличии в языке одной одноместной буквы и двух предметных переменных?

Открытые вопросы

Вопрос 1

Существуют ли аналогичные примеры в интуиционистском случае?

Вопрос 2

Существуют ли аналогичные примеры в случае рефлексивно-транзитивных (или хотя бы просто транзитивных) шкал?

Замечание. Аналог Log_4 возможен в рефлексивном случае.

Вопрос 3

Какова алгоритмическая выразительность логик конечных шкал при наличии в языке одной одноместной буквы и двух предметных переменных?

Открытые вопросы

Вопрос 1

Существуют ли аналогичные примеры в интуиционистском случае?

Вопрос 2

Существуют ли аналогичные примеры в случае рефлексивно-транзитивных (или хотя бы просто транзитивных) шкал?

Замечание. Аналог Log_4 возможен в рефлексивном случае.

Вопрос 3

Какова алгоритмическая выразительность логик конечных шкал при наличии в языке одной одноместной буквы и двух предметных переменных?

Открытые вопросы

Вопрос 1

Существуют ли аналогичные примеры в интуиционистском случае?

Вопрос 2

Существуют ли аналогичные примеры в случае рефлексивно-транзитивных (или хотя бы просто транзитивных) шкал?

Замечание. Аналог Log_4 возможен в рефлексивном случае.

Вопрос 3

Какова алгоритмическая выразительность логик конечных шкал при наличии в языке одной одноместной буквы и двух предметных переменных?

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$
Part 1: Describing Kripke frames

Observation

For an arbitrary φ, $\quad (\mathfrak{F}, w_0) \models \varphi \iff (\mathfrak{F}_{md(\varphi)}, w_0) \models \varphi.$

Take the following predicate letters:

$W(x)$	—	x is a world;
$D(x,y)$	—	y is an individual in the domain of x;
$R(x,y)$	—	y is reachable from x.

Define the formula M as follows:

$$\begin{array}{l} \exists x\, W(x) \wedge \\ \forall x\, [W(x) \to \exists y\, D(x,y)] \wedge \\ \forall x \forall y \forall z\, [W(x) \wedge W(y) \wedge \neg W(z) \wedge D(x,z) \wedge R(x,y) \to D(y,z)]. \end{array}$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$ Part 1: Describing Kripke frames

Observation

For an arbitrary φ, $(\mathfrak{F}, w_0) \models \varphi \iff (\mathfrak{F}_{md(\varphi)}, w_0) \models \varphi$.

Take the following predicate letters:

$W(x)$ – x is a world;
$D(x, y)$ – y is an individual in the domain of x;
$R(x, y)$ – y is reachable from x.

Define the formula M as follows:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\, W(x) \wedge \\
\forall x\, [W(x) \to \exists y\, D(x, y)] \wedge \\
\forall x \forall y \forall z\, [W(x) \wedge W(y) \wedge \neg W(z) \wedge D(x, z) \wedge R(x, y) \to D(y, z)].
\end{array}
$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$ Part 2: Describing frame $\mathfrak{F}_n$

Since $\mathfrak{F}_n$ is a finite frame, we can effectively describe it with a $\mathbf{QCL}^=$-formula F_n.

To make F_n part of the embedding, we need to massage it into the right shape. To that end, define the translation

$$\begin{array}{rcl} (x = y)^* & = & (x = y); \\ (R(x,y))^* & = & R(x,y); \\ (\theta_1 \wedge \theta_2)^* & = & \theta_1^* \wedge \theta_2^*; \\ (\neg\theta_1)^* & = & \neg\theta_1^*; \\ (\forall x\, \theta_1)^* & = & \forall x\, (W(x) \to \theta_1^*). \end{array}$$

and take the formula F_n^*.

Finally, describe the root of $\mathfrak{F}_n$:

$$Root(x) \quad = \quad \forall y\, \neg R(y,x).$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$ Part 2: Describing frame $\mathfrak{F}_n$

Since $\mathfrak{F}_n$ is a finite frame, we can effectively describe it with a $\mathbf{QCL}^=$-formula F_n.
To make F_n part of the embedding, we need to massage it into the right shape. To that end, define the translation

$$
\begin{array}{rcl}
(x = y)^* & = & (x = y); \\
(R(x,y))^* & = & R(x,y); \\
(\theta_1 \wedge \theta_2)^* & = & \theta_1^* \wedge \theta_2^*; \\
(\neg\theta_1)^* & = & \neg\theta_1^*; \\
(\forall x\, \theta_1)^* & = & \forall x\, (W(x) \to \theta_1^*).
\end{array}
$$

and take the formula F_n^*.
Finally, describe the root of $\mathfrak{F}_n$:

$$
Root(x) \;=\; \forall y\, \neg R(y,x).
$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$
Part 2: Describing frame $\mathfrak{F}_n$

Since $\mathfrak{F}_n$ is a finite frame, we can effectively describe it with a $\mathbf{QCL}^=$-formula F_n.
To make F_n part of the embedding, we need to massage it into the right shape. To that end, define the translation

$$\begin{array}{rcl} (x = y)^* & = & (x = y); \\ (R(x,y))^* & = & R(x,y); \\ (\theta_1 \wedge \theta_2)^* & = & \theta_1^* \wedge \theta_2^*; \\ (\neg\theta_1)^* & = & \neg\theta_1^*; \\ (\forall x\, \theta_1)^* & = & \forall x\, (W(x) \to \theta_1^*). \end{array}$$

and take the formula F_n^*.
Finally, describe the root of $\mathfrak{F}_n$:

$$Root(x) \quad = \quad \forall y\, \neg R(y,x).$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}_=$ Part 3: Standard translation

Let $ST_x(\varphi)$ be the standard translation of the formula φ into classical first-order logic, defined as follows:

$$
\begin{array}{rcl}
ST_x(P(y_1,\ldots,y_m)) & = & P'(y_1,\ldots,y_m,x);\\
ST_x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) & = & ST_x(\varphi_1) \wedge ST_x(\varphi_2);\\
ST_x(\neg\varphi_1) & = & \neg ST_x(\varphi_1);\\
ST_x(\Box\varphi_1) & = & \forall y\,(W(y) \wedge R(x,y) \to ST_y(\varphi_1));\\
ST_x(\forall y\,\varphi_1) & = & \forall y\,(\neg W(y) \wedge D(x,y) \to ST_x(\varphi_1)),
\end{array}
$$

Then,

$$
\mathfrak{M}, w \models \varphi \quad \rightleftharpoons \quad \mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w].
$$

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$
Part 4: Grande finale

Let φ be a formula with $md(\varphi) \leqslant n$.

Observation

$\mathfrak{F}_n, w_0 \models \varphi \rightleftharpoons M \wedge F_n^* \to \forall x\,[W(x) \wedge Root(x) \to ST_x(\varphi)] \in \mathbf{QCL}^=$

Therefore, we have

Theorem

Fr_n, for every n, is recursively enumerable.

Corollary

Log_1 is recursively enumerable.

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$ Part 4: Grande finale

Let φ be a formula with $md(\varphi) \leqslant n$.

Observation

$\mathfrak{F}_n, w_0 \models \varphi \rightleftharpoons M \wedge F_n^* \to \forall x\,[W(x) \wedge Root(x) \to ST_x(\varphi)] \in \mathbf{QCL}^=$

Therefore, we have

Theorem

Fr_n, for every n, is recursively enumerable.

Corollary

Log_1 is recursively enumerable.

Embedding Fr_n into $\mathbf{QCL}^=$ Part 4: Grande finale

Let φ be a formula with $md(\varphi) \leqslant n$.

Observation

$\mathfrak{F}_n, w_0 \models \varphi \rightleftharpoons M \wedge F_n^* \to \forall x\,[W(x) \wedge Root(x) \to ST_x(\varphi)] \in \mathbf{QCL}^=$

Therefore, we have

Theorem

Fr_n, for every n, is recursively enumerable.

Corollary

Log_1 is recursively enumerable.