Комбинаторика замощений ("многомерных слов")

Применения в алгебре

Алексей Яковлевич Белов,
Илья Анатольевич Иванов-Погодаев

Полугруппы

Стандартные определения

Полугруппа: множество с ассоциативной бинарной операцией.

Образующие или буквы:.

Ноль 0: $0x=x0=0$ для любого элемента x

Можно определить полугруппу как множество слов конечной длинны над алфавитом *L, получается* . *свободная полугруппа*. Дополнительно можно наложить определяющие соотношения типа $Word_1=Word_2$ *или* $Word=0$.

Конечно определенная полугруппа: полугруппа с конечным множеством определяющих соотношений.

Ниль-элемент: элемент x такой что $x^n=0$ при некотором натуральном n.

Ниль полугруппа: полугруппа, в которой все элементы являются ниль-элементами

Пример бесконечной нильполугруппы
Полугруппа слов над алфавитом $\{a,b,c\}$ с соотношениями вида $\{X^2=0\}$ (для каждого слова X).

Проблема Бернсайда для групп

Элемент x периодичен с периодом n если $x^n=1$ для некоторого натурального n. Группа периодична с периодом n если для любого x из G: $x^n=1$.

Проблема Бернсайда	Верно ли, что конечно порожденная группа периода n конечна?

Это верно для *n=1,2,3,4,6 (про n=5 ничего не известно!)*.

Известны контрпримеры для нечетных чисел больших 665 (П.С.Новиков, С.И.Адян, недавно С.И.Адян улучшил оценку до 101); для четных чисел больших нескольких тысяч (А.Лысенок, С.Иванов).

Инспирированная работой Новикова-Адяна деятельность Рипса (в последующем Громова и Ольшанского) привела к созданию геометрической интерпретации.

Конечно-определенная проблема Бернсайда	Существует ли конечно определенная бесконечная периодическая группа?

И.Рипс предложил возможный контрпример.
Определенные продвижения были сделаны Ольшанским и Сапиром.

Конечноопределенные группы

Вопросы

Имеет смысл рассмотреть конечноопределенные объекты. Иными словами, это объекты, заданные с помощью конечного объема информации.

Несколько интересных групп, колец или полугрупп может быть построено с помощью конечного числа определяющих соотношений. Есть и несколько открытых вопросов.

Например, В.Н. Латышев поставил следующий вопрос:

В.Н.Латышев	*Существует ли бесконечное конечноопределенное нилькольцо?*

Полугрупповая постановка Л.Н.Шеврина и М.В. Сапира:

Л.Н.Шеврин и М.В. Сапир	*Существует ли бесконечная конечноопределенная нильполугруппа?*

Пути контроля определяющих соотношений

Основной вопрос: как контролировать определяющие соотношения?

Возможные способы

- **Базис Гребнера и лемма о композиции**
- **Малые сокращения**
- **Реализация машины Тьюринга или машины Минского**

Достаточно сложно строить нужные объекты в конечноопределенном случае. Основным методом является автоматный подход.

Конечно определенные полугруппы как системы взаимодействующих автоматов

Буква – внутреннее состояние автомата, слово – цепочка автоматов

Соотношения – взаимодействие автоматов, конечная определенность означает локальность взаимодействия. На этом пути удалось построить конечно определенную полугруппу с рекурсивной достаточно большой размерностью Гельфанда-Кириллова

Вопрос *Построить конечно определенную полугруппу с размерностью Гельфанда-Кириллова 2.5*

На этом пути также был получен ответ на вопрос В.Н. Латышева: показана алгоритмическая неразрешимость проблемы распознания делителей нуля для полугрупп с конечным базисом Гребнера (при этом для мономиальных алгебр эта проблема алгоритмически разрешима)

Однако

проблема «узости канала» передачи информации приводит к том, что не удается в полной мере реализовать контроль над определяющими соотношениями

Конечно-определенные полугруппы

Мономиальный случай

Пример	*Не существует бесконечной конечноопределенной нильполугруппы, все определяющие соотношения которой мономиальны.*

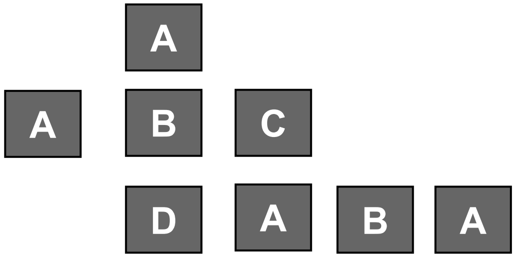
Эквивалентное описание	*Пусть $\{v_i\}$ – конечный набор запрещенных слов. Пусть существует бесконечное слово без запрещенных подслов. Тогда существует и периодическое слово без запрещенных подслов.*

Мечта	*Если бы мы могли перемножать буквы не только слева и справа, но и вверх и вниз, мы могли бы использовать в конструкции методы апериодических замощений, так как замощения используют очень похожий язык краевых условий.*

Наша цель – реализация этой мечты.
То есть, нужно создать язык, общий для полугрупп и для замощений.

Конечно определенные объекты

Имеет смысл рассмотреть «многомерные слова»



Это позволяет решить проблему узости канала передачи информации

Нужно научиться умножать буквы сверху и снизу

Аналогом периодического слова будет периодическое замощение

Такими «многомерными словами» являются замощения

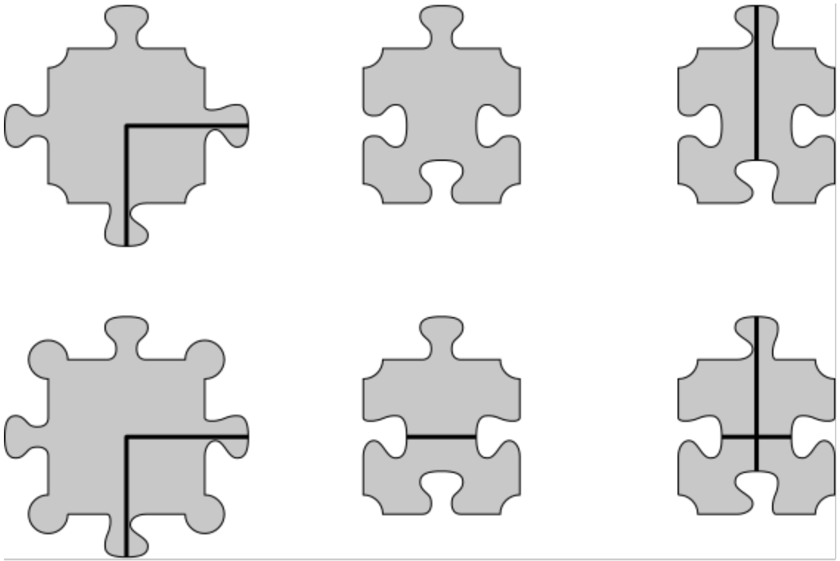
В теории замощений решены идейно похожие вопросы - как с помощью локальных правил достичь глобального порядка

Конечная определенность		Задачи на замощение
Получение глобальных свойств с помощью локальных правил	⟺	Конструирование апериодичных локально определенных замощений

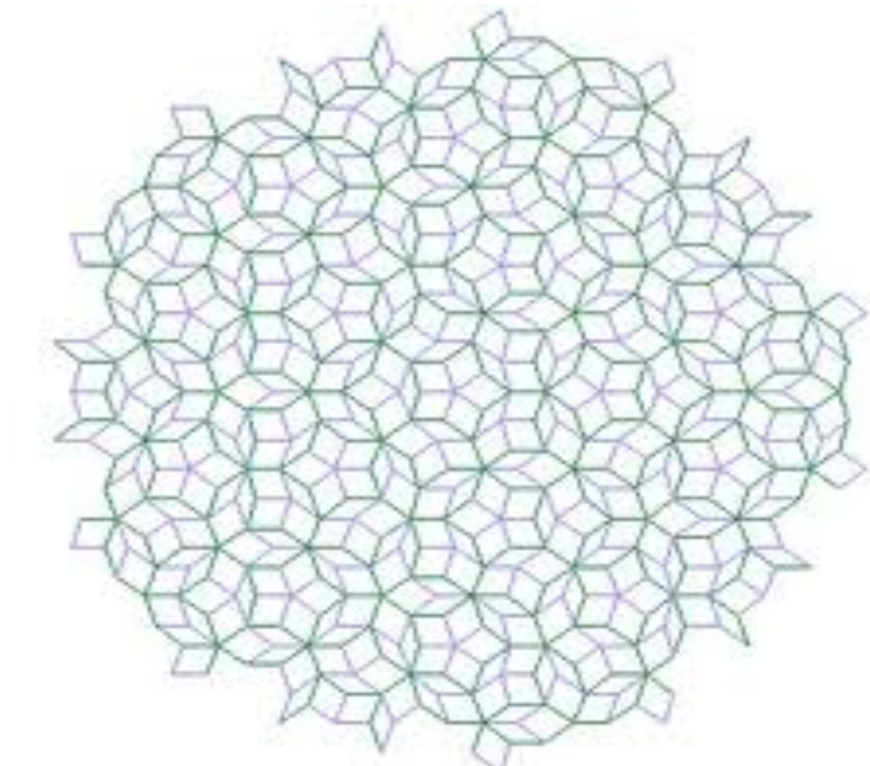
Есть существенная связь между этими двумя областями

Мозаики

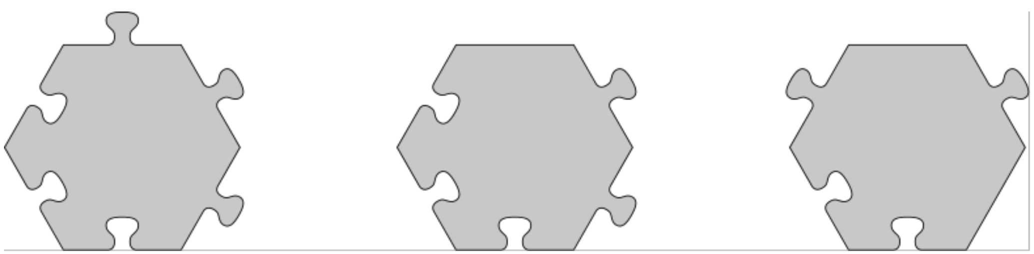
Мозаика Робинсона



Мозаика Пенроуза



Шестиугольная мозаика



Полугруппы и мозаики

Три языка

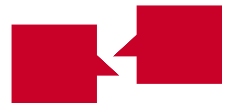
Мы хотим «читать» мозаики как слова. То есть пути на мозаике будут словами в полугруппе. Установим некоторые общие понятия для полугрупп и замощений.

Полугруппа

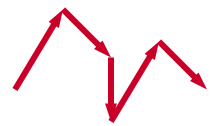
ab=0 мономиальное соотношение

abcab слово, элемент полугруппы

Мозаика



Запрещенное краевое условие



Путь на мозаике

Для того чтобы построить нильполугруппу, мы хотим создать набор определяющих соотношений, позволяющих нам преобразовать любое периодическое слово в ноль. В параллельном мире замощений, мы можем использовать язык краевых условий, чтобы только непериодические замощения были возможны.

Приведение периодич. слова к нулю	Непродолжаемость периодичных фрагментов	Недопущение периодичности
С помощью	С помощью	С помощью
Определяющих соотношений	Граничных условий	Иерархической структуры

Задание локальными правилами глобальной структуры – осуществляется с помощью аналогов теоремы Гудмана-Штраусса.

Язык путей

Наиболее подходящим методом описания является язык путей

Полугруппа

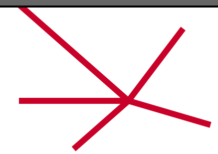
Буква

abcaba **слово, элемент полугруппы**

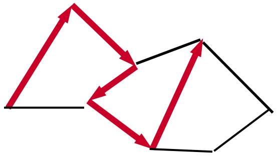
abdc=0 **мономиальное соотношение**

abcd=aebd **равные слова**

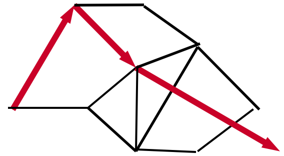
Мозаика



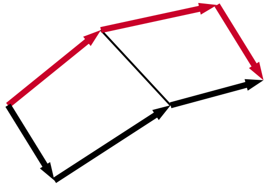
Типы узлов



Путь на мозаике



Невозможный путь

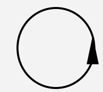


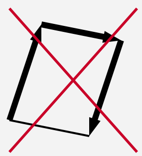
Эквивалентные пути

Этот язык может быть использован как для описания различных мозаичных свойств так и легко может быть переведен в язык полугрупп.

Язык путей

Дополнительные соображения

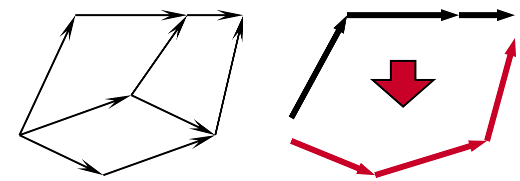
Разрешены только непериодические пути и мозаики → То есть, периодический путь должен быть запрещен →  Тогда «круговой» путь должен быть запрещен



Хороший способ исправить это: запретить негеодезические пути

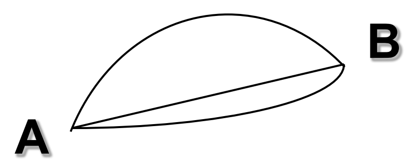
То есть, мы строим иерархическую мозаику, где все периодические пути запрещены либо могут быть преобразованы в запрещенные пути. Нужен инструмент для определения, является путь периодическим или нет.

Этот инструмент – возможность пути «извиваться»: мы можем поменять некоторые подпути несколько раз и локально преобразовать геодезический путь в другой геодезический путь, с тем же началом и концом.



Путь может «сканировать» окружающую его окрестность мозаики с помощью локальных изменений (rewriting rules)

Любая пара узлов A и B соединяется системой геодезических, образующих диск достаточной ширины.



Свойства геометрического комплекса

В силу построения, основой полученной алгебраической структуры является геометрический комплекс, обладающий следующими свойствами:

Плиточная структура

Каждый комплекс семейства состоит из нескольких топологически квадратных плиток, склееных друг с другом по сторонам

Детерминированность

По кодам (цветам) трех вершин, лежащих в углах одной плитки однозначно восстанавливается цвет четвертой вершины

Равномерная эллиптичность

Две любые вершины на комплексе, на расстоянии n соединены пучком кратчайших путей, имеющим ширину, растущую неограниченно с ростом n

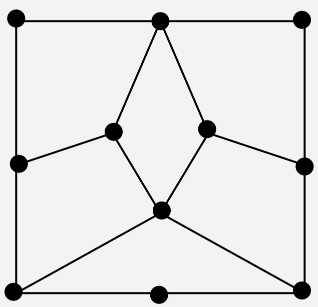
Непериодичность цветовой кодировки

Кодировка каждого комплекса непериодична: любой путь на комплексе имеет кодировку, не содержащую слова с периодом 9

Эти свойства делают возможным включение механизма анализа слова: слово, содержащее период 9 может быть приведено к виду, содержащему запрещенное короткое подслово, то есть к нулю

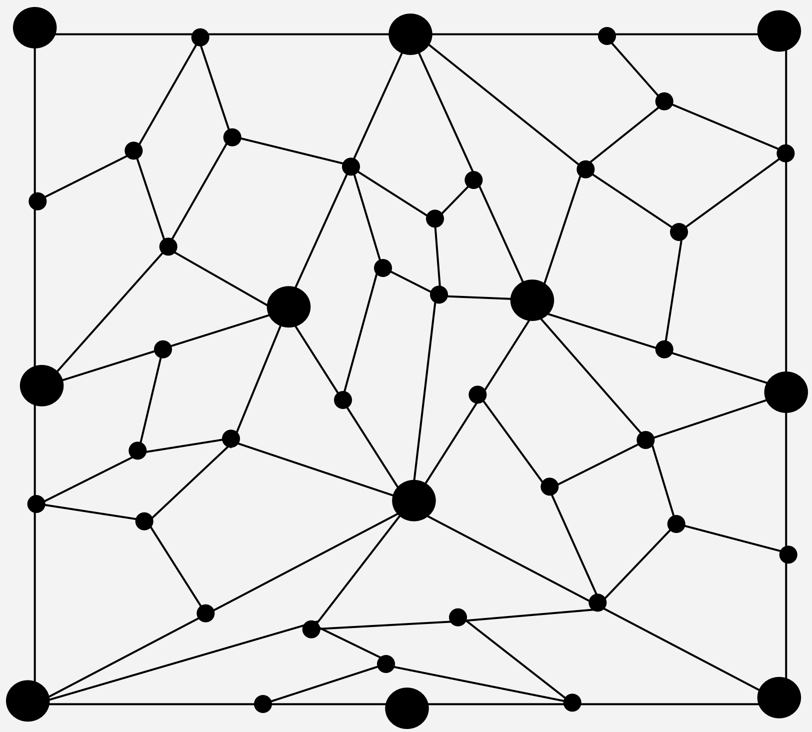
Конструкция геометрического комплекса

Прототип (уровень 1)



Прототип. Фигурка разбивается на 6 меньших.

Уровень 2

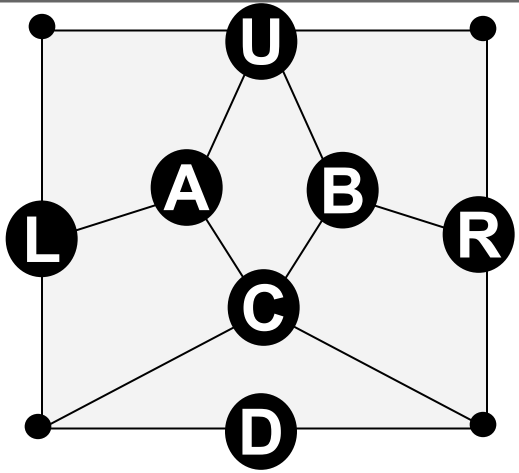


Свойства

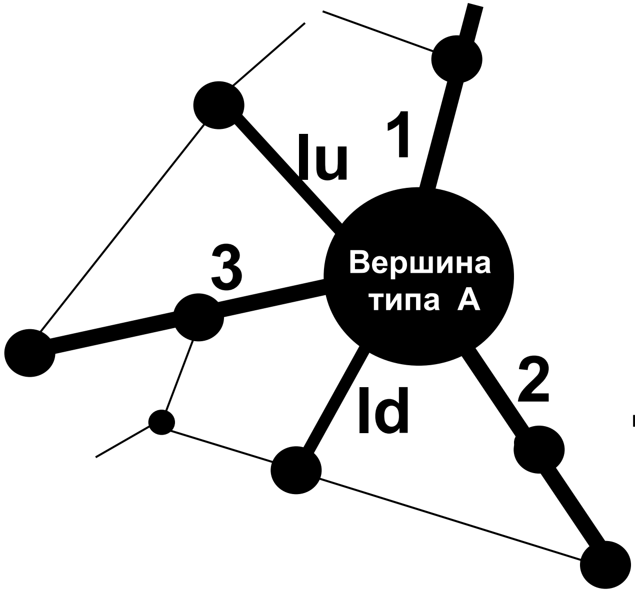
- ❑ **Каждая вершина имеет конечный порядок;**
- ❑**Каждый путь, пересекающий структуру n-го уровня локально преобразуется в путь, проходящий по границе;**
- ❑**Путь, проходящий через две стороны структуры локально преобразуется в путь, проходящий через две другие стороны**

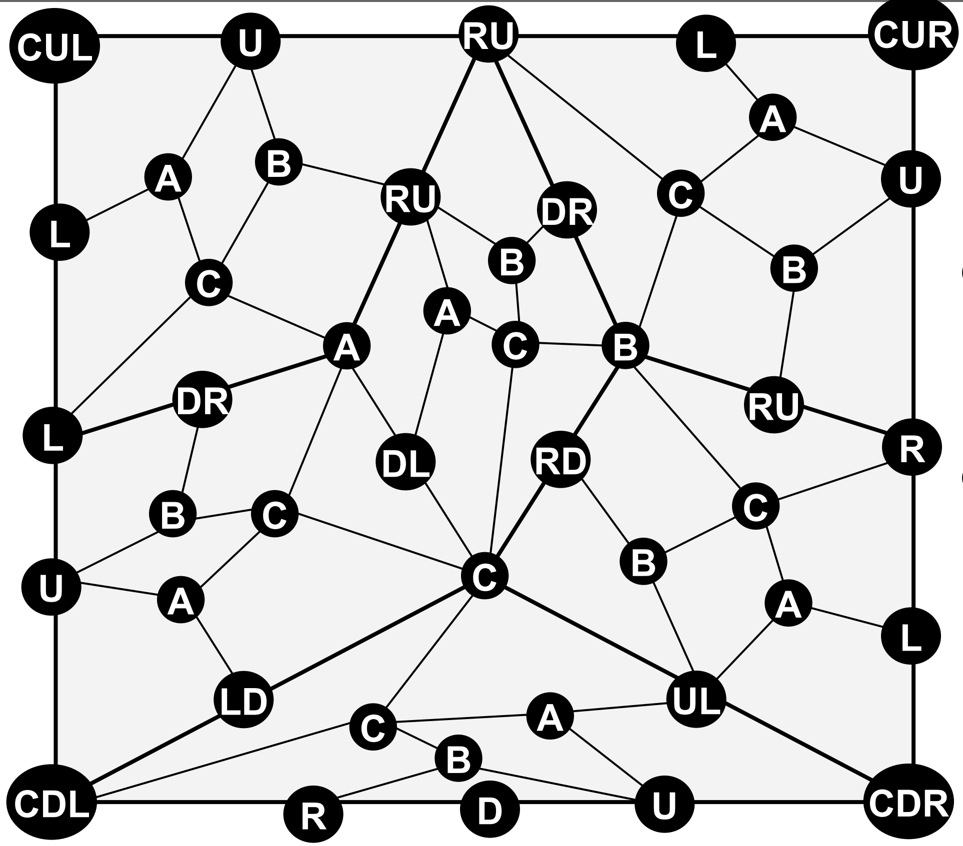
Кодирование узлов и ребер

Кодирование узлов



Кодирование входящих и выходящих ребер





Преобразование путей на мозаике соответствует презобразованию кодов этих путей. Коды путей это слова в полугруппе

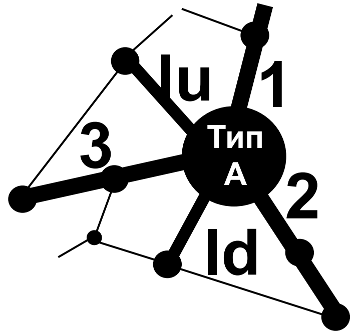
Мы используем символы A, B, C, L, U, R, D, UL, LU, UR, RU, LD, DL, RD, DR, CDL, CDR, CUR, CUL чтобы закодировать различные типы узлов
Для каждого типа узлов мы можем закодировать все входящие и выходящие ребра

Код пути это последовательность типов узлов и типов ребер (с некоторыми дополнительными техническими особенностями)

Определяющие соотношения в полугруппе

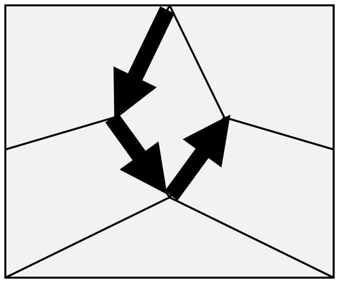
В полугруппе используется несколько видов определяющих соотношений:

1. Коды коротких невозможных путей приравниваются к нулю



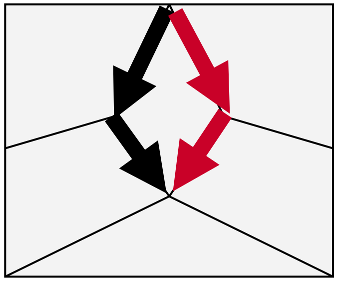
1-A-4 =0

2. Коды коротких некратчайших путей приравниваются к нулю



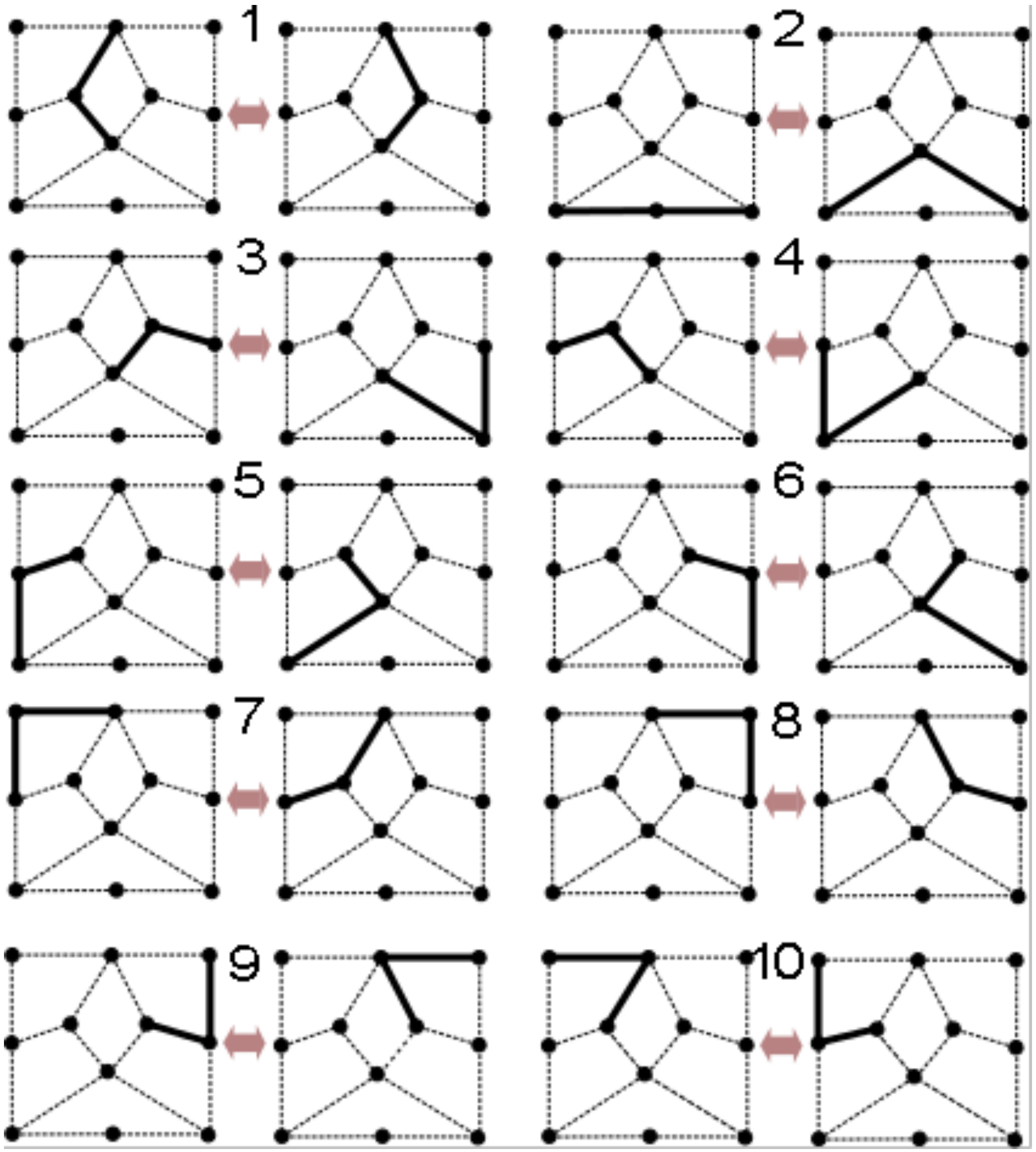
U-1-1-A-2-1-C-2-3-B =0

3. Вводятся эквивалентные пары путей (обходы одной минимальной плитки)



U-1-1-A-2-1-C =U-2-1-B-3-2-C

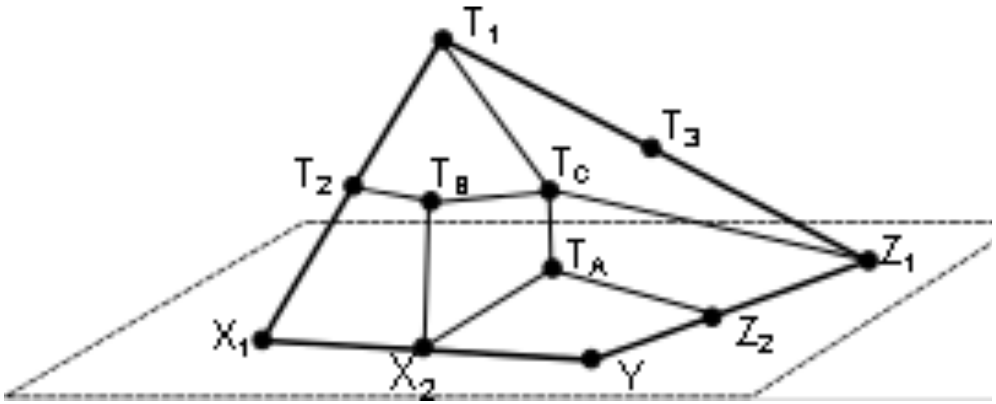
Перекидочные соотношения



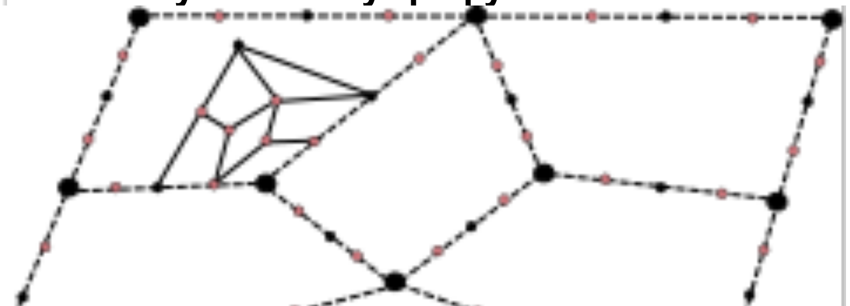
Все возможные преобразования путей получаются как комбинации 10 базовых преобразования. Эти преобразования возможны на различных иерархических уровнях. Если два пути эквивалентны, то код одного пути определяет код другого.

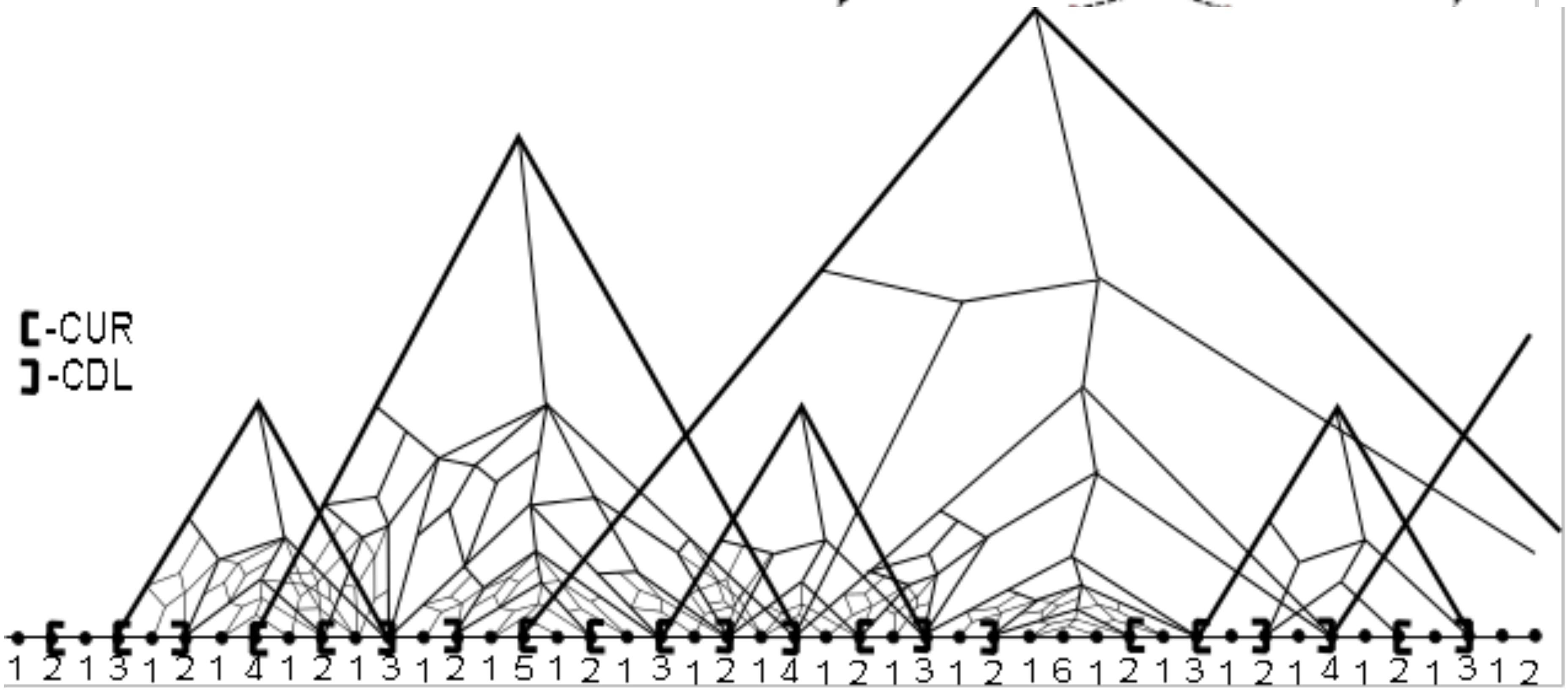
Эти свойства проверяются для всех уровней иерархии, и для различных случаев расположения пути.

Подклейки

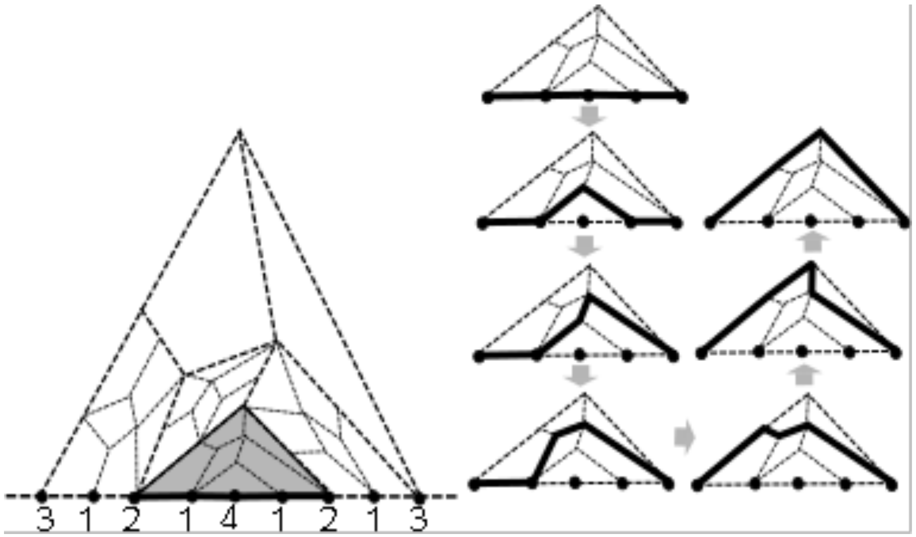


С целью обойти «узкие места» мы используем специальные подклейки к базовому плоскому графу

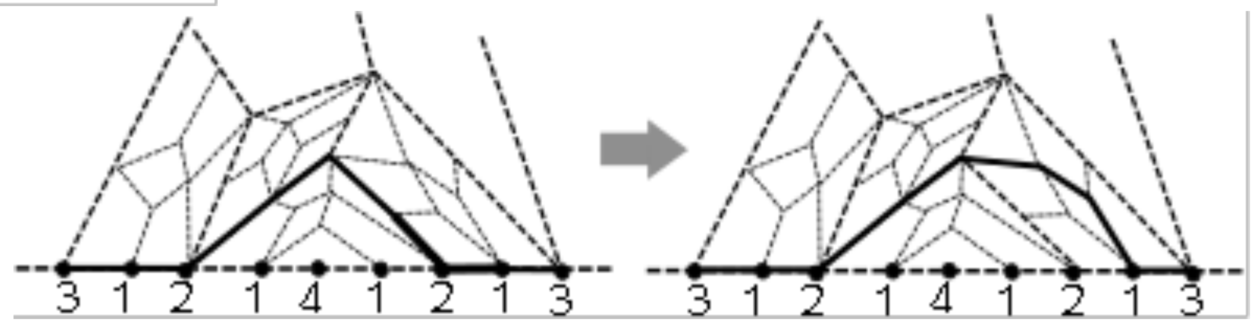


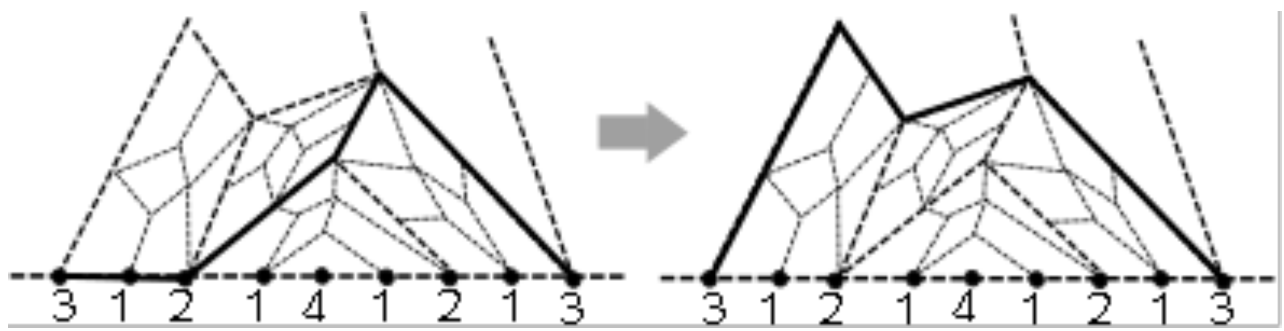


Проверка слова локальными преобразованиями

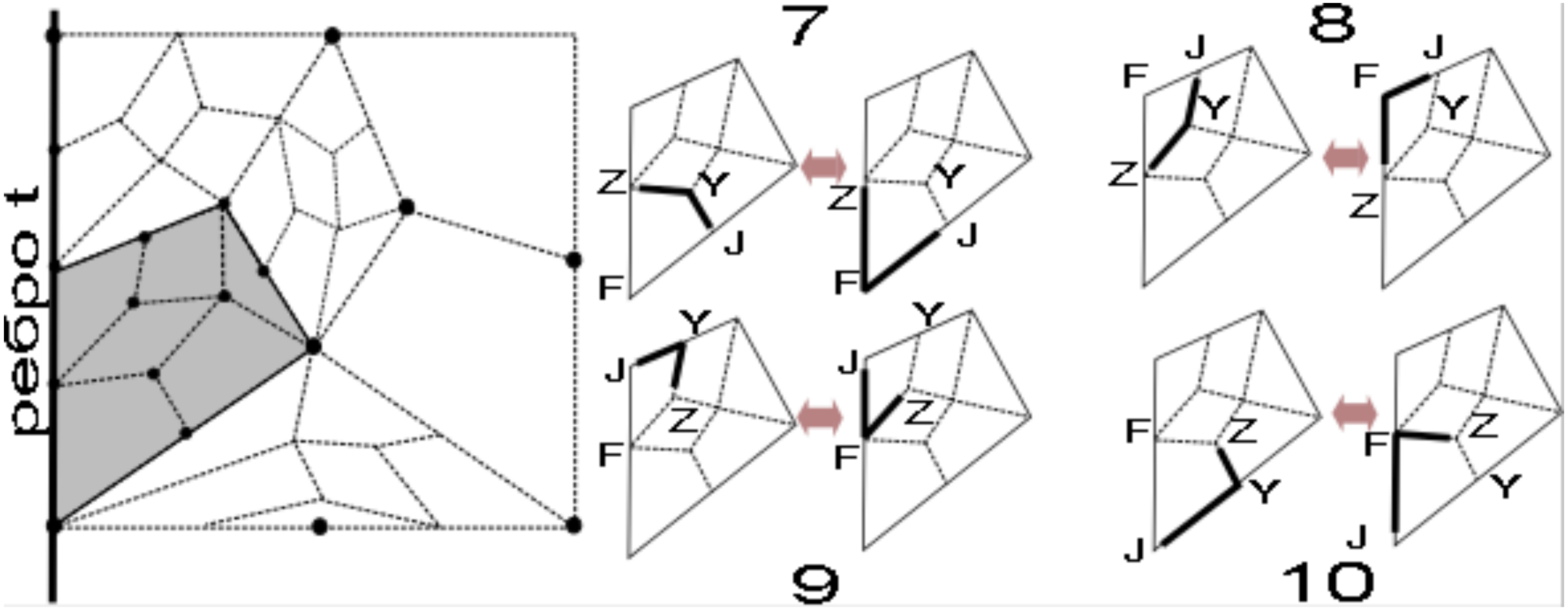


Здесь мы можем увидеть как слово в полугруппе «проверяет себя» с помощью последовательности локальных пребразования пути (и кода этого пути)

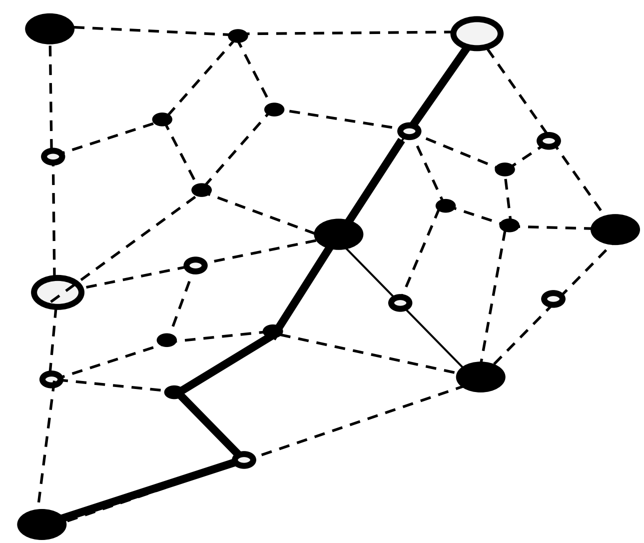




Один из случаев расположения



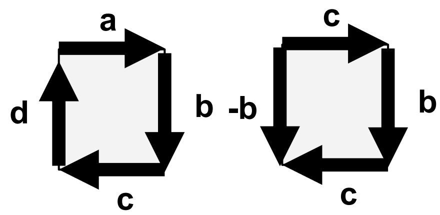
Это один из случаев расположения пути, состоящего из двух ребер на комплексе. Для каждого такого случая мы проверяем что код одного пути из пары эквивалентных путей определяет код другого пути.



После этой проверки мы можем показать то каждое слово либо равно нулю либо соответствует некоторому пути на комлексе. Код каждого пути в девятой степени может быть преобразован к нулю.

Что нужно для конструкции группы

Пусть задан набор квадратных плиток, стороны которых раскрашены в конечное число пар цветов. Прикладывать друг к другу можно две стороны плиток, имеющих дополняющие цвета. Рассмотрим свойства такого набора, позволяющие связать с ним группу



Симметричность плиток

Каждая плитка соответствует одному определяющему соотношению. Для каждой плитки должен существовать аналог в виде повернутой и перевернутой копии

Необходимое условие для существования группы

Детерминированность

По цветам двух ребер в одной плитке однозначно восстанавливаются цвет двух других ребер

Влечет условие C(4)-T(4) в группе

Непериодичность замощения

С помощью набора можно замостить плоскость только непериодическим способом

Отсутствие периодичного замощения влечет отсутствие вложения Z+Z в качестве подгруппы

Наличие непериодичного замощения влечет негиперболичность группы

По набору с такими свойствами строится конечно определенная негиперболическая группа, не содержащая Z+Z (плоскости) в качестве подгруппы, и обладающая условием малых сокращений C(4)-T(4)

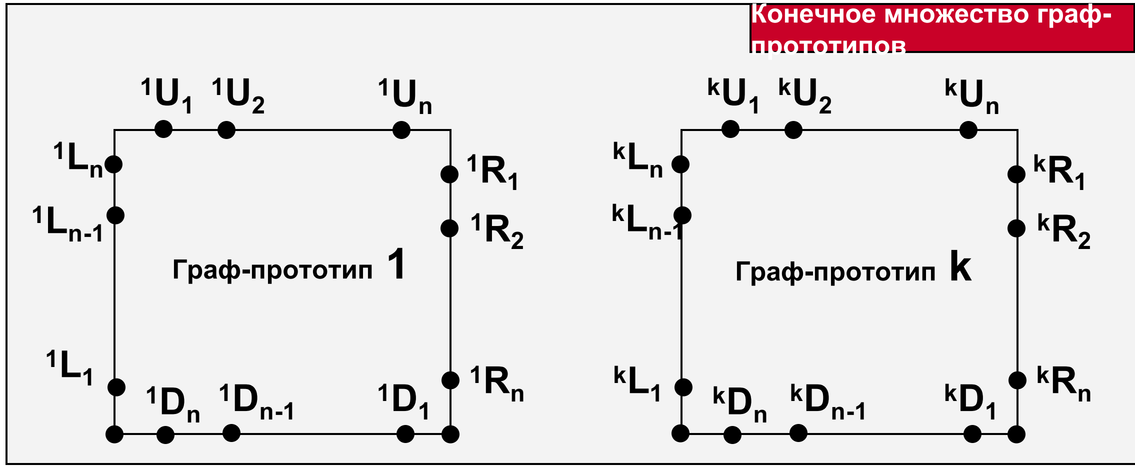
Спасибо за внимание

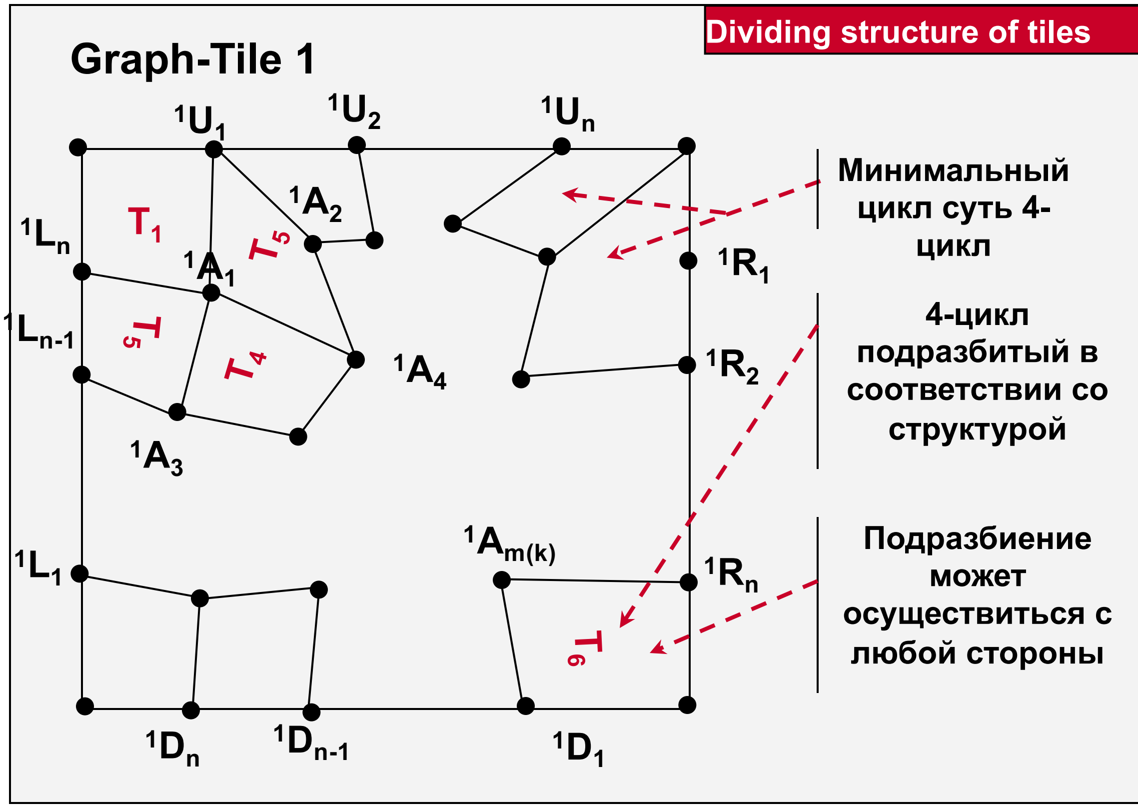
Иерархический граф

Имеется конечное множество плиток: каждая делиится на 4-циклы.

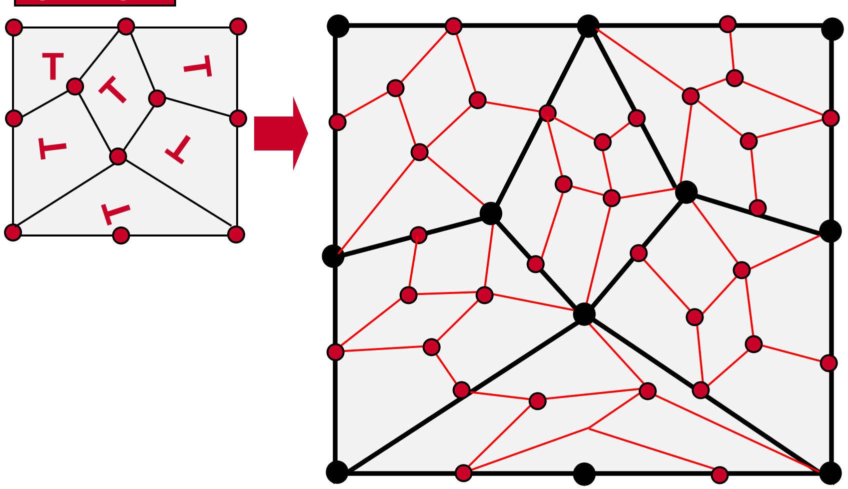
Обозначим типы вершин ^1L_j или (D, R, U в зависимости от стороны). Внутренние вершины плитки k суть $^kA_1$.. $^kA_{m(k)}$

Имееются также правила разбиения и его разметки. Получается иерархическое замощение.





Пример

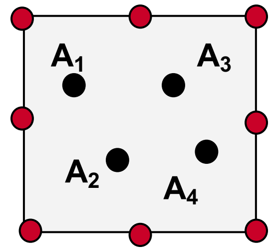


Типы вершин

.

Черные

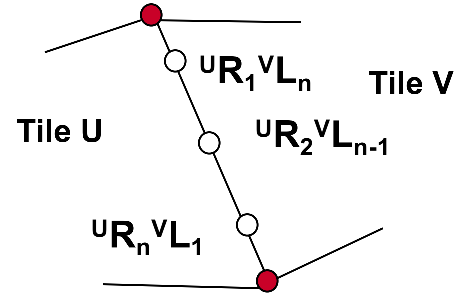
Это внутренние вершины A_i



Белые

Это лежащие на границе. Они описываются как комбинации вершин на сторонах примыкающих плиток L_i D_i R_i U_i.

Если правая сторона плитки U контачит с левой стороной V то тогда образуются R_iL_{n+1-i} белые вершины.

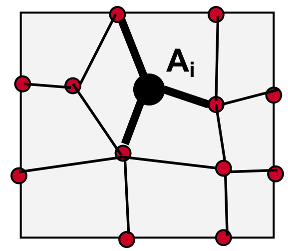


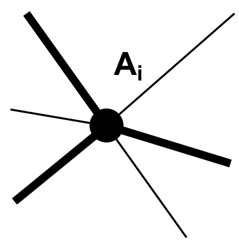
Локальная структура черной вершины

Рассмотрим вершину A_i на плитке T. Зафиксируем граничные ребра плиток из которых составлена наша плитка (следующий иерарахический уровень).

Некоторые из них A_i внешние ребра. Назовем их ***главными ребрами*** для A_i.

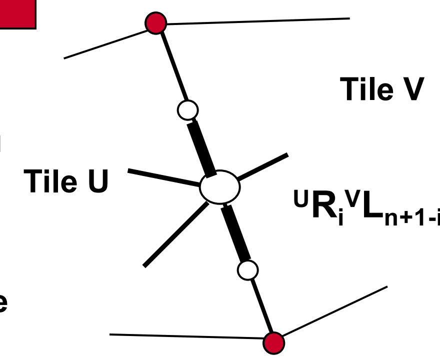
Возможно, A_i имеют дополнительные ребра (они могут возникнуть при конструировании следующего иерархического уровня). Назовем их ***Вторичными ребрами*** для A_i.





Локальная структура белой вершины

Рассмотрим вершину ${}^{U}R_i{}^{V}L_{n+1-i}$
На границе между U и V. Имеется два внешних ребра на границе. Назовем их ***Главными ребрами*** для ${}^{U}R_i{}^{V}L_{n+1-l}$
Также возможны другие внешние ребра (в U или V). Назовем их ***Вторичными ребраами.***



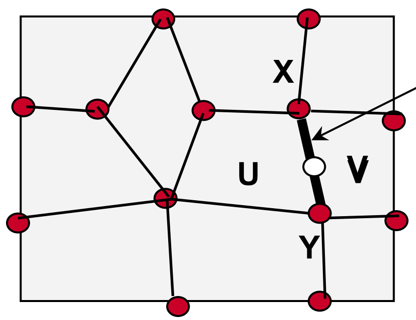
Условие конечности

Существует универсальная константа D ограничивающая степень вершин D. Это обеспечивается дополнительными правилами примыкания.

Additional parameters (shades)

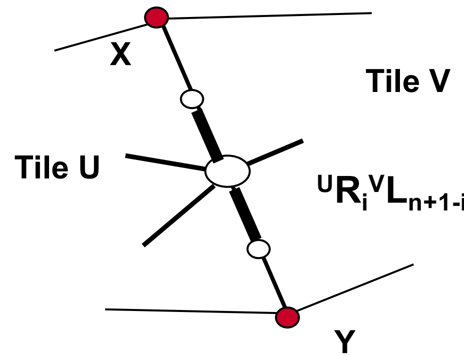
If we know the vertices on the path, we know some local structure of a graph. But we need additional information about this structure. Thus, we consider some additional parameters for white vertices of our graph.

First parameter (edge code)



For any tile we can code all decomposition edges of it. Let the code of the edge be the first parameter of all white vertices on the edge except the ends (X,Y).

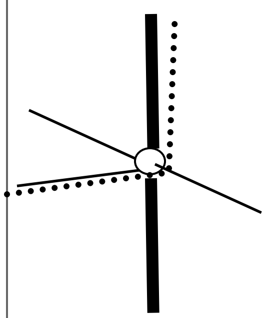
Second parameter (pair of «bosses»)



There are two vertices X,Y in the opposite ends of the border edge. Let the combination of (X,Y) types be the second parameter for all white vertices on the border edge.

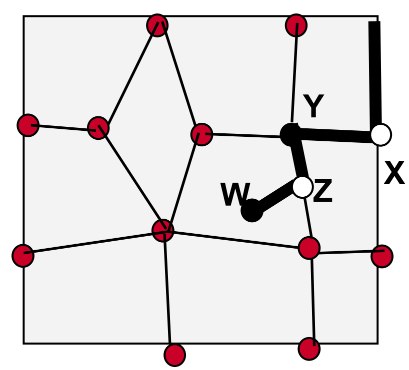
Finally, the «vertex» is a combination of vertex type (A_i, or L_iR_j, or U_iL_i etc), first and second parameters. So, if we know some white vertex X, we know that biggest tiles meets here, where in bigger tile these two tiles are situated, and which vertices are the «bosses» of this edge.

Path reading



Consider the path on graph. Then the path walks through some vertex, we can note the edges wherefrom this path comes and where it goes.

So we can code all incoming and outcoming edges, and write a finite set of all paths on our graph with length lower than some global constant N.

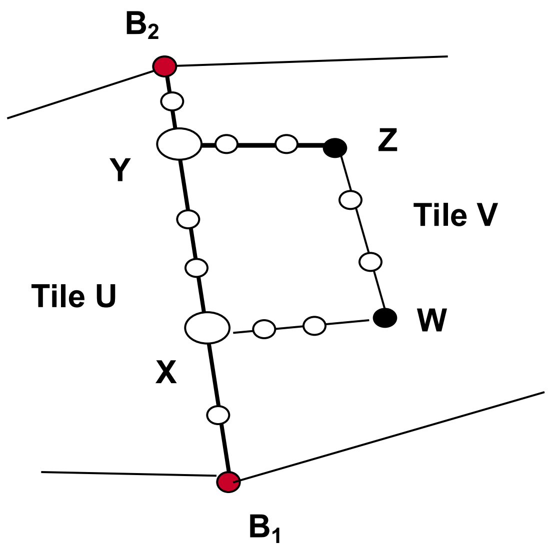


If we know nothing about the graph, but have the full code of the path, we can examine it and find some information about local structure.

For example, if we walk through some main edges and then turn to secondary edge, this means that the path went into the tile (and we know which tile is it).

If there are no forbidden paths

Now we can consider the class of graphs with declared set of vertices with the condition that there are no forbidden paths.



Consider some two bosses B_1 and B_2 and long enough path between them consists of white only vertices and walks on main edges only.

Next to B_1 vertex should have a type G_1H_n, (where G,H can be L,R,U,D types). Note that indexes are (1,n). Next vertex has indexes (2,n-1), and so on.

So we can see that on any n+1 sector there are n vertices which indexes are increasing by 1, and one vertex have some other pair of indexes. Let us call such vertices *high-leveled*, and the other *1-leveled*.

Ring path lemma

If high leveled X vertex has the indexes (i,n+1-i), for I<n, then the next high-leveled vertex Y has the indexes (i+2,n-i).

In hierarchical graph there is a path to some black vertex W. So in our situation we can walk from X to the edge on the way to W. It is easy to see that first black vertex we will meet should have the same type as W. Otherwise we can choose a forbidden path.

From W, we can turn to the edge on the way to Z (as in hierarchical graph) walk to first black vertex. It can be only Z. From Z we can walk to Y (as in hierarchical graph). So, Y in our graph should have the same type as in hierarchical graph, so Y has the indexes (i+2,n-i).

Introduction

This talk is devoted to the method for control an infinite structures by some local rules.

We consider a hierarchical graph S, then fix the finite set of vertices types. Let us call a finite sequence of graph vertices as a *path*.

Question	***Is it possible to write a finite set of forbidden paths such that the following condition holds:*** ***If an infinite graph with declared set of possible vertices contains no forbidden paths then any local part of it is a subgraph of our hierarchical graph S.***

The answer for this question is yes. We can fix some large enough constant N and consider all paths with length lower than N, which are not exist in the graph S.

The structure of such hierarchical graph can be used for construction of finitely presented semigroups. For example, this method used for the construction of finitely presented nil-semigroup.