У структуры $\langle \mathbb{N}, \{<\} \rangle$ нет максимального разрешимого обогащения

Алексей Львович Семенов,
Сергей Федорович Сопрунов

1. Обзор результатов

Будем рассматривать структуры с общим носителем $\mathbb{N}$ и пространства (элементарной, слабой монадической, монадической) определимости, порожденные конечным числом отношений.

Определение пространства определимости, порожденного семейством отношений:

1. Обзор результатов

Будем рассматривать структуры с общим носителем $\mathbb{N}$ и пространства (элементарной, слабой монадической, монадической) определимости, порожденные конечным числом отношений.

Определение пространства определимости, порожденного семейством отношений:

Дадим имена отношениям, возьмем все отношения, определяемые формулами. Это и есть пространство. Пространство разрешимо – теория разрешима (не зависит от выбора порождающих).

1. Обзор результатов

Проблема: существуют ли максимальные разрешимые пространства отношений?

Поставлена в работе Calvin C. Elgot and Michael O. Rabin.
Decidability and Undecidability of Extensions of Second (First) Order Theory of (Generalized) Successor
JSL, 1966.

1. Обзор результатов

Пример теоремы из работы Элгота – Рабина

Пространство, порожденное отношением следования и множеством степеней двойки элементарно разрешимо, также для других редких множеств.

1. Обзор результатов

Пример теоремы из работы Элгота – Рабина

Пространство, порожденное отношением следования и множеством степеней двойки элементарно разрешимо, также для других редких множеств.

Siefkes D., 1969:
Проблема: монадическая разрешимость пространства, порожденного отношениями следования и $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{n}) > 0$

1. Обзор результатов

Пример теоремы из работы Элгота – Рабина

Пространство, порожденное отношением следования и множеством степеней двойки элементарно разрешимо, также для других редких множеств.

Siefkes D., 1969:
Проблема: монадическая разрешимость пространства, порожденного отношениями следования и $\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{n}) > 0$
Доказана в
Семенов А. Л. ***Логические теории одноместных функций на натуральном ряде*** Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1983. Т. 47, № 3. – С. 623.

1. Обзор результатов

Теорема Сопрунова 1988

Не существует максимальных разрешимых слабо монадических пространств.

1. Обзор результатов

Bès A., Cégielski P,

- 2008 Строится разрешимое монадическое пространство, добавление любой константы к которому делает его неразрешимым

1. Обзор результатов

Bès A., Cégielski P,

- 2008 Строится разрешимое монадическое пространство, добавление любой константы к которому делает его неразрешимым
- 2009 Достаточные условия в терминах графа Гайфмана для не максимальности в элементарном случае

1. Обзор результатов

Bès A., Cégielski P,

- 2008 Строится разрешимое монадическое пространство, добавление любой константы к которому делает его неразрешимым
- 2009 Достаточные условия в терминах графа Гайфмана для не максимальности в элементарном случае

Bès A., Rabinovich A.

- 2010, 2012 Разрешимое монадическое пространство, порожденное линейным порядком и одноместными предикатами, не может быть максимальным

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой $\Sigma; ' <' \in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой $\Sigma; '<' \in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.

Пусть $\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x})$ –произвольная формула структуры $\mathcal{M}$.

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой $\Sigma; '<' \in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.
Пусть $\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x})$ –произвольная формула структуры $\mathcal{M}$.

$$(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}))?$$

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой $\Sigma;' <' \in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.
Пусть $\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x})$ –произвольная формула структуры $\mathcal{M}$.

$$(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}))?$$

максимальный определимый фильтр

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой Σ;$'<'\in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.
Пусть $\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x})$ –произвольная формула структуры $\mathcal{M}$.

$$(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}))?$$

максимальный определимый фильтр

$$(\forall \boldsymbol{x})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))?$$

2. План построения

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \Sigma \rangle$, с конечной сигнатурой $\Sigma; '<' \in \Sigma$ и разрешимой теорией. Строим такое неопределимое в $\mathcal{M}$ отношение $\boldsymbol{R} \subset \mathbb{N}$, что теория структуры $\langle \mathbb{N}, \Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\} \rangle$ разрешима.
Пусть $\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x})$ –произвольная формула структуры $\mathcal{M}$.

$$(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}))?$$

максимальный определимый фильтр

$$(\forall \boldsymbol{x})(\Phi(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))?$$

деревья, определимые в $\mathcal{M}$; ранг вершины дерева

3. Максимальный определимый фильтр

Лемма

Существует такое бесконечное разрешимое подмножество (фильтр) $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$, что для любой формулы $Q(x, \bar{y})$ в сигнатуре Σ выполнено
(i) для любого набора параметров $\bar{a}$ множество $\{x \in \mathcal{F} | M \models Q(x, \bar{a})\}$ конечно или $\{x \in \mathcal{F} | M \models \neg Q(x, \bar{a})\}$ конечно.
(ii) оределимы отношение $P(\bar{y}) \rightleftharpoons (\{x \in \mathcal{F} | M \models Q(x, \bar{y})\}$ конечно) и такая функция f, что
$P(\bar{y}) \Rightarrow \{x \in \mathcal{F} | M \models Q(x, \bar{y})\} \subset [0, f(\bar{y})]$

3. Максимальный определимый фильтр

Лемма

Существует такое бесконечное разрешимое подмножество (фильтр) $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}$, что для любой формулы $Q(x, \bar{y})$ в сигнатуре Σ выполнено
(i) для любого набора параметров $\bar{a}$ множество $\{x \in \mathcal{F} | M \vDash Q(x, \bar{a})\}$ конечно или $\{x \in \mathcal{F} | M \vDash \neg Q(x, \bar{a})\}$ конечно.
(ii) оределимы отношение $P(\bar{y}) \rightleftharpoons (\{x \in \mathcal{F} | M \vDash Q(x, \bar{y})\}$ конечно) и такая функция f, что $P(\bar{y}) \Rightarrow \{x \in \mathcal{F} | M \vDash Q(x, \bar{y})\} \subset [0, f(\bar{y})]$

Мы называем множество $\mathcal{F}$ фильтром, поскольку оно задает максимальный фильтр на семействе определимых подмножеств. Построение данного множества аналогично построению последовательности Морли. Элементы фильтра ***большие*** множества.

4. Ветвящийся порядок

Нам понадобятся результаты работы: Сопрунов С.Ф. ***Разрешимые обогащения структур.* *Вопросы Кибернетики, 134 (1988)*** 175-179.

4. Ветвящийся порядок

Нам понадобятся результаты работы: Сопрунов С.Ф.
Разрешимые обогащения структур.
Вопросы Кибернетики, 134 (1988) 175-179.
Назовем частичный порядок $\langle A, <\rangle$ ***ветвящимся***, если для любого $a \in A$ найдутся такие $b, c < a$,
что $\{d|d < b\} \cap \{d|d < c\} = \varnothing$.
В работе доказывается

4. Ветвящийся порядок

Нам понадобятся результаты работы: Сопрунов С.Ф. ***Разрешимые обогащения структур.*** ***Вопросы Кибернетики, 134 (1988)*** 175-179.

Назовем частичный порядок $\langle A, < \rangle$ ***ветвящимся***, если для любого $a \in A$ найдутся такие $b, c < a$, что $\{d | d < b\} \cap \{d | d < c\} = \varnothing$.

В работе доказывается

Утверждение

Если в структуре определим ветвящийся порядок, то структура не является максимальной.

5. Деревья. Ранг вершины дерева.

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{\boldsymbol{Tr}, <\} \rangle$.
$\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ задает дерево на $\mathbb{N}$, а $<$ – обычный порядок на $\mathbb{N}$.
Дерево $\boldsymbol{Tr}$ на $\mathbb{N}$ – семейство конечных подмножеств $\mathbb{N}$, замкнутое относительно взятия начального отрезка– т.е. $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{Tr} \Rightarrow \boldsymbol{s} \cap [0, \boldsymbol{i}] \in \boldsymbol{Tr}$.

5. Деревья. Ранг вершины дерева.

Структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{\boldsymbol{Tr}, <\}\rangle$.
$\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ задает дерево на $\mathbb{N}$, а $<$ – обычный порядок на $\mathbb{N}$.
Дерево $\boldsymbol{Tr}$ на $\mathbb{N}$ – семейство конечных подмножеств $\mathbb{N}$, замкнутое относительно взятия начального отрезка– т.е. $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{Tr} \Rightarrow \boldsymbol{s} \cap [0, \boldsymbol{i}] \in \boldsymbol{Tr}$.
Элементы множества $\boldsymbol{Tr}$ – вершины дерева, порядок на вершинах задается так: $\boldsymbol{s_i} \preceq \boldsymbol{s_j} \rightleftharpoons \boldsymbol{s_i}$ – начальный отрезок $\boldsymbol{s_j}$.

6. Ранг вершины дерева (определение)

Ранг вершины s, $rk(s)$: частичное отображение $rk : Tr \to \mathbb{N}$. Если поддерево с корнем s является конечноветвящимся, то $rk(s) = 0$. Пусть все ранги меньше n определены. Скажем, что вершина s ***n-регулярна***, если
$(\exists a)(\forall s' \succ s)(s' \cap (max(s), a) = \varnothing \to rk(s') < n)$
Каждой n-регулярной вершине s сопоставим число $r(s) < n$ так, что
$r(s) = max\{k | (\forall a)(\exists s' \succ s)(s' \cap (max(s), a) = \varnothing \wedge rk(s') = k\}$
Так, если у вершины s конечное число непосредственных сыновей, то s n-регулярна и $r(s) = 0$.
Наконец положим $rk(s) = n$ если (1) все вершины $s' \succeq s$ n-регулярны и (2) $max\{r(s') | s' \succeq s\} = n - 1$. Вершину назовем ***регулярной***, если она k-регулярна для некоторого k.

7. Упрощенный ранг вершины дерева.

исходная позиция

7. Упрощенный ранг вершины дерева.

исходная позиция

ход первого игрока

7. Упрощенный ранг вершины дерева.

исходная позиция

ход первого игрока

ход второго игрока

7. Упрощенный ранг вершины дерева.

исходная позиция

ход первого игрока

ход второго игрока

Если второй игрок не проигрывает за n ходов, то ранг вершины не меньше n.

9. Ранг вершины дерева (свойства)

Вершины, у которых ранг определен, назовем вершинами конечного ранга($rk(s) < \infty$), прочие – бесконечного ($rk(s) = \infty$).

Лемма

Пусть ранг вершины s конечен $rk(s) = n, n > 0$. Тогда
(i) если $s_1 \succ s$, то ранг s_1 конечен и $rk(s_1) \leqslant rk(s)$.
(ii) существует бесконечно много таких попарнонесравнимых $s' \succ s$, что $rk(s') = n - 1$.
(iii) $rk(s) > r(s)$

9. Ранг вершины дерева (свойства)

Вершины, у которых ранг определен, назовем вершинами конечного ранга($rk(s) < \infty$), прочие – бесконечного ($rk(s) = \infty$).

Лемма

Пусть ранг вершины s конечен $rk(s) = n, n > 0$. Тогда
(i) если $s_1 \succ s$, то ранг s_1 конечен и $rk(s_1) \leqslant rk(s)$.
(ii) существует бесконечно много таких попарнонесравнимых $s' \succ s$, что $rk(s') = n - 1$.
(iii) $rk(s) > r(s)$

Основная лемма

Если теория структуры разрешима, то для любого дерева Tr существует такое число k, что все вершины конечного ранга имеют ранг меньше k.

8. Ранг вершины дерева (свойства)

Следствие 1

Путь отношение $\boldsymbol{Tr}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ задает дерево на $\mathbb{N}$, теория структуры $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{\boldsymbol{Tr}, <\}\rangle$ разрешима.
(i) отношение "s – вершина конечного ранга" определимо (в $\mathcal{M}$).
(ii) множество вершин бесконечного ранга или пусто, или образует определимое поддерево, изоморфное $\mathbb{N}^{<\omega}$.

8. Ранг вершины дерева (свойства)

Следствие 1

Путь отношение $Tr(y, x)$ задает дерево на $\mathbb{N}$, теория структуры $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, \{Tr, <\}\rangle$ разрешима.
(i) отношение "s – вершина конечного ранга" определимо (в $\mathcal{M}$).
(ii) множество вершин бесконечного ранга или пусто, или образует определимое поддерево, изоморфное $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Следствие 2

для определимого дерева $Tr(y, x)$ существует такая определимая функция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любого набора $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}, a_{i+1} > \varphi(a_i)$, являющегося отрезком вершины $s \supset \{a_1 < a_2 < \cdots < a_n\}$ конечного ранга, выполнено $Tr_r k \geqslant n$.

Доказательство несколько неконструктивно, поскольку мы не можем выяснить, есть ли вершины бесконечного ранга.

9. Вынуждение

Условие $\boldsymbol{p}$ -- это тройка $\langle \boldsymbol{p}^+, \boldsymbol{p}^-, \varphi^{\boldsymbol{p}} \rangle$, $\quad \boldsymbol{p}^+$ -- конечное подмножество $\mathbb{N}$.

9. Вынуждение

Условие $\boldsymbol{p}$ -- это тройка $\langle \boldsymbol{p}^+, \boldsymbol{p}^-, \varphi^{\boldsymbol{p}} \rangle$, $\quad \boldsymbol{p}^+$ -- конечное подмножество $\mathbb{N}$.

$\boldsymbol{p}^-$ -- не большое определимое подмножество $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{p}^+ \cap \boldsymbol{p}^- = \varnothing$;

9. Вынуждение

Условие $\boldsymbol{p}$ -- это тройка $\langle \boldsymbol{p}^+, \boldsymbol{p}^-, \varphi^{\boldsymbol{p}} \rangle$, $\quad \boldsymbol{p}^+$ -- конечное подмножество $\mathbb{N}$.

$\boldsymbol{p}^-$ -- не большое определимое подмножество $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{p}^+ \cap \boldsymbol{p}^- = \varnothing$;

$\varphi^{\boldsymbol{p}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ -- определимая функция.

9. Вынуждение

Условие $\boldsymbol{p}$ -- это тройка $\langle \boldsymbol{p}^{+}, \boldsymbol{p}^{-}, \varphi^{\boldsymbol{p}} \rangle$, $\quad \boldsymbol{p}^{+}$ -- конечное подмножество $\mathbb{N}$.

$\boldsymbol{p}^{-}$ -- не большое определимое подмножество $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{p}^{+} \cap \boldsymbol{p}^{-} = \varnothing$;

$\varphi^{\boldsymbol{p}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ -- определимая функция.

Порядок:
$(\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q}) \leftrightharpoons (\boldsymbol{p}^{+}$ -- начальный отрезок $\boldsymbol{q}^{+}) \wedge (\boldsymbol{p}^{-} \subset \boldsymbol{q}^{-}) \wedge$
$\wedge (\varphi^{\boldsymbol{q}} > \varphi^{\boldsymbol{p}}) \wedge ((\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{q}^{+} \setminus \boldsymbol{p}^{+})((\boldsymbol{x}, \varphi^{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})) \cap \boldsymbol{q}^{+} = \varnothing)$

9. Вынуждение

Условие $\boldsymbol{p}$ -- это тройка $\langle \boldsymbol{p}^+, \boldsymbol{p}^-, \varphi^{\boldsymbol{p}} \rangle$, $\quad \boldsymbol{p}^+$ -- конечное подмножество $\mathbb{N}$.

$\boldsymbol{p}^-$ -- не большое определимое подмножество $\mathbb{N}$, $\quad \boldsymbol{p}^+ \cap \boldsymbol{p}^- = \varnothing$;

$\varphi^{\boldsymbol{p}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ -- определимая функция.

Порядок:
$(\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q}) \leftrightharpoons (\boldsymbol{p}^+$ -- начальный отрезок $\boldsymbol{q}^+) \wedge (\boldsymbol{p}^- \subset \boldsymbol{q}^-) \wedge$
$\wedge (\varphi^{\boldsymbol{q}} > \varphi^{\boldsymbol{p}}) \wedge ((\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{q}^+ \setminus \boldsymbol{p}^+)((\boldsymbol{x}, \varphi^{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})) \cap \boldsymbol{q}^+ = \varnothing)$

Понятие вынуждения '$\Vdash$ ' -- индукцией по построению формулы Φ в сигнатуре $\Sigma \cup \{\boldsymbol{R}\}$: $\boldsymbol{p} \Vdash \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}) \leftrightharpoons \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{p}^+$ и т.д.

10. Вынуждение

Утверждение

Для любой формулы Φ и для любого условия p найдутся такие определимые семейства $A^+(\bar{a}, x), A^-(\bar{a}, x)$ конечных подмножеств $\mathbb{N}$, что для некоторого $p' \leq p$ и любого $q \leq p'$ выполнено

$$q \Vdash \Phi \iff (\exists \bar{a})((\{x | A^+(\bar{a}, x)\} \subset q^+) \wedge (\{x | A^-(\bar{a}, x)\} \subset q^-))$$

10. Вынуждение

Утверждение

Для любой формулы Φ и для любого условия p найдутся такие определимые семейства $A^+(\bar{a}, x), A^-(\bar{a}, x)$ конечных подмножеств $\mathbb{N}$, что для некоторого $p' \leq p$ и любого $q \leq p'$ выполнено

$$q \Vdash \Phi \iff (\exists \bar{a})((\{x | A^+(\bar{a}, x)\} \subset q^+) \wedge (\{x | A^-(\bar{a}, x)\} \subset q^-))$$

Теперь нетрудно стандартным образом построить разрешимую генерическую последовательность $p_0 \geq p_1 \geq \ldots$ и положить $R = \bigcup_i p_i^+$

11. Открытые проблемы

Проблема Рабина – Элгота для элементарного и монадического случая

Ослабления:
Возможное усиление основной теоремы доклада $\langle \mathbb{N}, +1 \rangle$

Soprunov S. F. ***An infinite branch in a decidable tree.*** arXiv preprint arXiv:1801.00423 (2018).

Soprunov S. F. ***There is no maximal decidable expansion of the*** $\langle \mathbb{N}, \{<\} \rangle$ ***structure*** arXiv preprint arXiv:1801.00423 (2019).