Модальные логики с оператором транзитивного замыкания: полнота, разрешимость, фильтрация

Е. Золин, С. Кикоть, И. Шапировский

старший научный сотрудник
Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

Ломоносовские чтения — 2020
21 октября 2020 года

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ \; = \; \bigcup_{n \geq 1} R^n \; = \; R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^{+} \;=\; \bigcup_{n\geq 1} R^{n} \;=\; R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^{*} \;=\; \bigcup_{n\geq 0} R^{n} \;=\; \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n = \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

- пропозициональная динамическая логика PDL

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ \ = \ \bigcup_{n \geq 1} R^n \ = \ R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^* \ = \ \bigcup_{n \geq 0} R^n \ = \ \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

- пропозициональная динамическая логика PDL
- оператор «общего знания»: $C\varphi = [a_1 \cup \ldots \cup a_n]^* \varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Sigma^*} \Box_\alpha \varphi$ где $\Box_{abaac} = \Box_a \Box_b \Box_a \Box_a \Box_c$ — модальность, соотв. слову $abaac$.

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ \;=\; \bigcup_{n\geq 1} R^n \;=\; R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^* \;=\; \bigcup_{n\geq 0} R^n \;=\; \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

- пропозициональная динамическая логика PDL
- оператор «общего знания»: $C\varphi = [a_1 \cup \ldots \cup a_n]^*\varphi = \bigwedge_{\alpha\in\Sigma^*} \Box_\alpha\varphi$ где $\Box_{abaac} = \Box_a\Box_b\Box_a\Box_a\Box_c$ — модальность, соотв. слову $abaac$.
- временна́я логика фон Вригта (1979): $\mathrm{Logic}(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, <)$.

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n = \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

- пропозициональная динамическая логика PDL
- оператор «общего знания»: $C\varphi = [a_1 \cup \ldots \cup a_n]^* \varphi = \bigwedge_{\alpha \in \Sigma^*} \Box_\alpha \varphi$ где $\Box_{abaac} = \Box_a \Box_b \Box_a \Box_a \Box_c$ — модальность, соотв. слову $abaac$.
- временна́я логика фон Вригта (1979): $\mathrm{Logic}(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, <)$.

R^+ труден в изучении ввиду его «инфинитарного» характера.
С технической точки зрения — в виду отсутствия компактности.

Модальности замыкания в логиках

Транзитивное замыкание бинарного отношения $R \subseteq (W \times W)$:

$$R^+ \;=\; \bigcup_{n\geq 1} R^n \;=\; R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

и *рефлексивно-транзитивное замыкание* отношения R:

$$R^* \;=\; \bigcup_{n\geq 0} R^n \;=\; \mathrm{Id}(W) \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

встречаются в модальных логиках довольно часто:

- пропозициональная динамическая логика PDL
- оператор «общего знания»: $C\varphi = [a_1 \cup \ldots \cup a_n]^*\varphi = \bigwedge_{\alpha\in\Sigma^*} \Box_\alpha\varphi$ где $\Box_{abaac} = \Box_a\Box_b\Box_a\Box_a\Box_c$ — модальность, соотв. слову $abaac$.
- временнáя логика фон Вригта (1979): $\mathrm{Logic}(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, <)$.

R^+ труден в изучении ввиду его «инфинитарного» характера.
С технической точки зрения — в виду отсутствия компактности.

Нет общих результатов о полноте, разрешимости, FMP (ПОКШ), которые были бы применимы к широкому спектру модальных логик

Важнейшие свойства логик

- *Определимость*
  (выразительные возможности данного языка)

Важнейшие свойства логик

- *Определимость*
  (выразительные возможности данного языка)

- *Полнота*
  (аксиоматизация всех законов в этом языке)

Важнейшие свойства логик

- *Определимость*
  (выразительные возможности данного языка)
- *Полнота*
  (аксиоматизация всех законов в этом языке)
- *Разрешимость*
  (и сложность, FMP, разрешающие процедуры)

Важнейшие свойства логик

- *Определимость*
  (выразительные возможности данного языка)

- *Полнота*
  (аксиоматизация всех законов в этом языке)

- *Разрешимость*
  (и сложность, FMP, разрешающие процедуры)

Что происходит с этими свойствами логик
при расширении *языка* логики?

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:
$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box \Diamond^{-} p) \;+\; (p \to \boxminus \Diamond p).$$

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:

$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box\Diamond^{-} p) \;+\; (p \to \Box^{-}\Diamond p).$$

Theorem

L — каноническая логика $\implies$ L^t каноническая

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:

$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box\Diamond^{-} p) \;+\; (p \to \boxminus\Diamond p).$$

Theorem

L — каноническая логика $\implies$ L^t каноническая $\implies$ L^t полная.

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:
$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box\diamondminus p) \;+\; (p \to \boxminus\Diamond p).$$

Theorem

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L^t каноническая $\Longrightarrow$ L^t полная.

2. Расширение модальной логики L **универсальной** модальностью:
$$L^u \;:=\; L \;+\; ([\forall]p \to \Box p) \;+\; (\text{аксиомы S5 для } [\forall])$$

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:

$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box\Diamond^{-}p) \;+\; (p \to \boxminus\Diamond p).$$

Theorem

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L^t каноническая $\Longrightarrow$ L^t полная.

2. Расширение модальной логики L **универсальной** модальностью:

$$L^u \;:=\; L \;+\; ([\forall]p \to \Box p) \;+\; (\text{аксиомы S5 для } [\forall])$$

Theorem

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L^u каноническая $\Longrightarrow$ L^u полная.

Полнота: обратная и универсальная модальности

Для временных логик L^t и логик с универсальной модальностью L^u имеют место общие теоремы о *полноте* (по Крипке).

1. *Временным напарником* модальной логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$ называют:

$$L^t \;:=\; L \;+\; (p \to \Box\diamondminus p) \;+\; (p \to \boxminus\Diamond p).$$

Theorem

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L^t каноническая $\Longrightarrow$ L^t полная.

2. Расширение модальной логики L **универсальной** модальностью:

$$L^u \;:=\; L \;+\; ([\forall]p \to \Box p) \;+\; (\text{аксиомы S5 для } [\forall])$$

Theorem

L — каноническая логика $\Longrightarrow$ L^u каноническая $\Longrightarrow$ L^u полная.

Это не применимо к логикам с модальностью $\boxplus$ **транз. замыкания**!

Логики с модальностью транзитивного замыкания

Формулы: $A, B \ ::= \ \bot \ | \ p \ | \ A \to B \ | \ \Box A \ | \ \boxplus A$

Формулы: $A, B \ ::= \ \bot \ | \ p \ | \ A \to B \ | \ \Box A \ | \ \boxplus A$

Модель Крипке с одним отношением: $M = (W, R, V)$

Логики с модальностью транзитивного замыкания

Формулы: $A, B \ ::= \ \bot \ | \ p \ | \ A \to B \ | \ \Box A \ | \ \boxplus A$

Модель Крипке с одним отношением: $M = (W, R, V)$

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xRy \quad \Rightarrow \quad M, y \models A\,) \\
M, x \models \boxplus A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xR^{+}y \quad \Rightarrow \quad M, y \models A\,)
\end{array}
$$

Логики с модальностью транзитивного замыкания

Формулы: $A, B \;::=\; \bot \mid p \mid A \to B \mid \Box A \mid \boxplus A$

Модель Крипке с одним отношением: $M = (W, R, V)$

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \forall y\,(\,xRy \quad\Rightarrow\quad M, y \models A\,) \\
M, x \models \boxplus A & \Leftrightarrow & \forall y\,(\,xR^{+}y \quad\Rightarrow\quad M, y \models A\,)
\end{array}
$$

Эквивалентно: Модель с двумя отношениями: $M = (W, R, S = R^{+}, V)$

Логики с модальностью транзитивного замыкания

Формулы: $A, B \ ::= \ \bot \ | \ p \ | \ A \to B \ | \ \Box A \ | \ \boxplus A$

Модель Крипке с одним отношением: $M = (W, R, V)$

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xRy \ \Rightarrow \ M, y \models A \,) \\
M, x \models \boxplus A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xR^+y \ \Rightarrow \ M, y \models A \,)
\end{array}
$$

Эквивалентно: Модель с двумя отношениями: $M = (W, R, S = R^+, V)$

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \models \Box A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xRy \ \Rightarrow \ M, y \models A \,) \\
M, x \models \boxplus A & \Leftrightarrow & \forall y \, (\, xSy \ \Rightarrow \ M, y \models A \,)
\end{array}
$$

Определимость (классов шкал)

Вопрос 1:

Задается ли класс всех шкал вида (W, R, R^+) *модал. формулами?*

Определимость (классов шкал)

Вопрос 1:

Задается ли класс всех шкал вида (W, R, R^+) модал. формулами?

Ответ: Да! (Сегерберг, 1970-е)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(A1)} & \boxplus p \to \Box p & (S \supseteq R) \\
\text{(A2)} & \boxplus p \to \Box \boxplus p & (S \supseteq R \circ S) \\
\text{(A3)} & \boxplus (p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) & (\text{Индукция})
\end{array}
$$

Определимость (классов шкал)

Вопрос 1:

Задается ли класс всех шкал вида (W, R, R^+) модал. формулами?

Ответ: Да! (Сегерберг, 1970-е)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(A1)} & \boxplus p \to \Box p & (S \supseteq R) \\
\text{(A2)} & \boxplus p \to \Box \boxplus p & (S \supseteq R \circ S) \\
\text{(A3)} & \boxplus (p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) & \text{(Индукция)}
\end{array}
$$

Факт

$F = (W, R, S) \models \text{(A1)} \wedge \text{(A2)} \wedge \text{(A3)} \iff S = R^+.$

Определимость (классов шкал)

Вопрос 1:

Задается ли класс всех шкал вида (W, R, R^+) *модал. формулами?*

Ответ: Да! (Сегерберг, 1970-е)

(A1)	$\boxplus p \to \Box p$	$(S \supseteq R)$
(A2)	$\boxplus p \to \Box \boxplus p$	$(S \supseteq R \circ S)$
(A3)	$\boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p)$	(Индукция)

Факт

$F = (W, R, S) \models (A1) \wedge (A2) \wedge (A3) \iff S = R^+$.

Альтернативы аксиоме (A2):

(A4)	$\boxplus p \to \boxplus \Box p$	$(S \supseteq S \circ R)$
(A5)	$\boxplus p \to \boxplus \boxplus p$	(S транзитивное)

Полнота и разрешимость логики K^+

Вопрос 2:

Какова аксиоматика логики K^+ *класса всех шкал вида* (W, R, R^+)*?*

Полнота и разрешимость логики K^+

Вопрос 2:

Какова аксиоматика логики K^+ *класса всех шкал вида* (W, R, R^+)*?*

Ответ: Тех же аксиом достаточно! [Сегерберг, 1977, 1982]

$$\mathsf{K}^+ \quad = \quad \mathsf{K}_2(\Box, \boxplus) \; + \{\, (\mathrm{A1}),\ (\mathrm{A2}),\ (\mathrm{A3}) \,\}.$$

Полнота и разрешимость логики K^+

Вопрос 2:

Какова аксиоматика логики K^+ класса всех шкал вида (W, R, R^+)?

Ответ: Тех же аксиом достаточно! [Сегерберг, 1977, 1982]

$$\mathrm{K}^+ \quad = \quad \mathrm{K}_2(\Box, \boxplus) \; + \{ \, (\mathrm{A1}), \; (\mathrm{A2}), \; (\mathrm{A3}) \, \}.$$

Ключевая трудность док-ва: формула (A3) — не каноническая.

Полнота и разрешимость логики K^+

Вопрос 2:

Какова аксиоматика логики K^+ *класса всех шкал вида* (W, R, R^+)*?*

Ответ: Тех же аксиом достаточно! [Сегерберг, 1977, 1982]

$$\mathsf{K}^+ \quad = \quad \mathsf{K}_2(\Box, \boxplus) \ + \{\, (\mathrm{A1}),\ (\mathrm{A2}),\ (\mathrm{A3})\, \}.$$

Ключевая трудность док-ва: формула (A3) — не каноническая.

Вопрос 3:

Разрешимость, сложность, FMP логики K^+?

Полнота и разрешимость логики K^+

Вопрос 2:

Какова аксиоматика логики K^+ класса всех шкал вида (W, R, R^+)?

Ответ: Тех же аксиом достаточно! [Сегерберг, 1977, 1982]

$$\mathsf{K}^+ \quad = \quad \mathsf{K}_2(\Box, \boxplus) \; + \{\,(\mathrm{A1}),\ (\mathrm{A2}),\ (\mathrm{A3})\,\}.$$

Ключевая трудность док-ва: формула (A3) — не каноническая.

Вопрос 3:

Разрешимость, сложность, FMP логики K^+?

Ответ: K^+ обладает FMP и ExpTime-полна.
[Fischer & Ladner 1979], [Kozen & Parikh 1981]

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Каноничность L не помогает.

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\, (A1), (A2), (A3) \,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*.

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{ (\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3}) \} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*.

Тогда

- логика L^+ — полна.

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*.

Тогда

- логика L^+ — полна. Более того,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L^+)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*,

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}), (\mathrm{A2}), (\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*.

Тогда

- логика L^+ — полна. Более того,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L^+)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*,
- следовательно, логика L^+ обладает свойством *FMP*,

Общая постановка проблемы полноты логик L^+

Для логики $L \subseteq \mathrm{Fm}(\Box)$, $\quad L^+ := L + \{\,(\mathrm{A1}),(\mathrm{A2}),(\mathrm{A3})\,\} \subseteq \mathrm{Fm}(\Box,\boxplus)$.

Вопрос:

Для каких логик L (кроме минимальной, K) логика L^+ будет полной?

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *каноническая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*.

Тогда

- логика L^+ — полна. Более того,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L^+)$ *допускает* **определимые** *фильтрации*,
- следовательно, логика L^+ обладает свойством *FMP*,
- а значит, L^+ *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/\sim$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и
$$x \sim y \implies (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/\!\sim$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и
$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$
2. $\widehat{x} \models p \Leftrightarrow x \models p,\quad$ для каждой переменной $p \in \Gamma$;

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/{\sim}$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и
$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$
2. $\widehat{x} \models p \Leftrightarrow x \models p$, для каждой переменной $p \in \Gamma$;
3. $R^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\max}_\Gamma$, где
$$\widehat{x}\, R^{\min}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \exists x' \sim x\ \exists y' \sim y : \qquad x'\, R\, y'$$
$$\widehat{x}\, R^{\max}_\Gamma\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \forall \text{ формулы } \Box B \in \Gamma\ \big(\, M, x \models \Box B \ \Longrightarrow\ M, y \models B \,\big)$$

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/\!\sim$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и
$$x \sim y \quad\Longrightarrow\quad (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$
2. $\widehat{x} \models p \Leftrightarrow x \models p$, для каждой переменной $p \in \Gamma$;
3. $R^{\min} \;\subseteq\; \widehat{R} \;\subseteq\; R^{\max}_\Gamma$, где
$$\widehat{x}\, R^{\min}\, \widehat{y} \quad\leftrightharpoons\quad \exists x' \sim x\; \exists y' \sim y : \qquad x'\, R\, y'$$
$$\widehat{x}\, R^{\max}_\Gamma\, \widehat{y} \quad\leftrightharpoons\quad \forall \text{ формулы } \Box B \in \Gamma \;\big(\, M, x \models \Box B \;\Longrightarrow\; M, y \models B \,\big)$$

Лемма о фильтрации. $\quad \forall B \in \Gamma \qquad \big(\, M, x \models B \;\Leftrightarrow\; \widehat{M}, \widehat{x} \models B \,\big)$

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/\!\sim$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и
$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$
2. $\widehat{x} \models p \Leftrightarrow x \models p$, для каждой переменной $p \in \Gamma$;
3. $R^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R^{\max}_\Gamma$, где
$$\widehat{x}\, R^{\min}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \exists x' \sim x\ \exists y' \sim y: \qquad x'\, R\, y'$$
$$\widehat{x}\, R^{\max}_\Gamma\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \forall \text{ формулы } \Box B \in \Gamma\ \big(M, x \models \Box B \implies M, y \models B\big)$$

Лемма о фильтрации. $\forall B \in \Gamma \qquad \big(M, x \models B \Leftrightarrow \widehat{M}, \widehat{x} \models B\big)$

Определение (Модально определимая фильтрация)

$\widehat{M}$ — *определимая* Γ-*фильтрация* модели M, если $\sim$ есть $\equiv_\Phi$ для некоторого конечного множества модальных формул $\Phi \supseteq \Gamma$.

Пусть Γ — конечное (Sub-замкнутое) множество модальных формул.

Определение (Фильтрация)

Γ-*фильтрация* модели $M = (W, R, V)$ — модель $\widehat{M} = (\widehat{W}, \widehat{R}, \widehat{V})$, где

1. $\widehat{W} = W/\!\sim$, где $\sim$ — отношение экв. на W *конечного* индекса и

$$x \sim y \quad \Longrightarrow \quad (M, x) \equiv_\Gamma (M, y) \qquad\qquad (\sim \text{ согласовано с } \Gamma)$$

2. $\widehat{x} \models p \Leftrightarrow x \models p$, для каждой переменной $p \in \Gamma$;
3. $R^{\min} \subseteq \widehat{R} \subseteq R_\Gamma^{\max}$, где

$$\widehat{x}\, R^{\min}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \exists x' \sim x\ \exists y' \sim y: \qquad x'\, R\, y'$$

$$\widehat{x}\, R_\Gamma^{\max}\, \widehat{y} \quad \leftrightharpoons \quad \forall \text{ формулы } \Box B \in \Gamma\ \big(M, x \models \Box B \implies M, y \models B\big)$$

Лемма о фильтрации. $\forall B \in \Gamma \qquad \big(M, x \models B \Leftrightarrow \widehat{M}, \widehat{x} \models B\big)$

Определение (Модально определимая фильтрация)

$\widehat{M}$ — *определимая* Γ-*фильтрация* модели M, если $\sim$ есть $\equiv_\Phi$ для некоторого конечного множества модальных формул $\Phi \supseteq \Gamma$.

Определение. Класс Frames(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

Определение. Класс $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

Определение. Класс Frames(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс Frames(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс Models(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

Определение. Класс $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс $\mathrm{Models}(L)$ *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ т.ч. } M \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ т.ч. } \widehat{M} \models L}$$

Определение. Класс $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс $\mathrm{Models}(L)$ *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ т.ч. } M \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ т.ч. } \widehat{M} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M, такой что $M \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$, такая что $\widehat{M} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс Frames(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ над } F \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ над } \widehat{F} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M со шкалой $F \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$ со шкалой $\widehat{F} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Определение. Класс Models(L) *допускает (опр.) фильтрацию*, если:

$$\boxed{\text{модель } M \text{ т.ч. } M \models L} \xrightarrow{\text{фильтрация}} \boxed{\text{конечная модель } \widehat{M} \text{ т.ч. } \widehat{M} \models L}$$

$\forall$ конечного множества модальных формул Γ
$\forall$ модели M, такой что $M \models L$
$\exists$ модель $\widehat{M}$, такая что $\widehat{M} \models L$:
$\widehat{M}$ есть (определимая) Γ-фильтрация модели M.

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\stackrel{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики* L*.*

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики L.*

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики L.*

Фильтрация и каноничность

$\mathsf{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathsf{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики* L.

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой* *канонической* *логики* L.

Ключевой факт 1: взаимодействие между

- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

Models(L) доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ Frames(L) доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики L.*

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики L.*

Ключевой факт 1: взаимодействие между

- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

M

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики* L.

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики* L.

Ключевой факт 1: взаимодействие между

- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

$$M \quad \mapsto \quad T := \mathrm{Theory}(M)$$

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики L.*

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики L.*

Ключевой факт 1: взаимодействие между

- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

$$M \quad \mapsto \quad T := \mathrm{Theory}(M) \quad \mapsto \quad \mathfrak{M}_T^{\mathrm{can}}$$

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики L.*

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики L.*

Ключевой факт 1: взаимодействие между
- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

$$
\begin{array}{ccccc}
M & \mapsto & T := \mathrm{Theory}(M) & \mapsto & \mathfrak{M}^{\mathrm{can}}_T \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \mathfrak{M}^{\mathrm{can}}_T/{\equiv_\Phi}
\end{array}
$$

Фильтрация и каноничность

$\mathrm{Models}(L)$ доп. опр. фильтрацию $\overset{??}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Frames}(L)$ доп. опр. фильтрацию

Лемма

(1) $\Longrightarrow$ *верно для любой логики* L.

(2) $\Longleftarrow$ *верно для любой канонической логики* L.

Ключевой факт 1: взаимодействие между
- **определимой** фильтрацией и
- **канонической** моделью (и логикой)

$$\begin{array}{ccccc} M & \mapsto & T := \mathrm{Theory}(M) & \mapsto & \mathfrak{M}^{\mathrm{can}}_T \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ M/{\equiv_\Phi} & & \cong & & \mathfrak{M}^{\mathrm{can}}_T/{\equiv_\Phi} \end{array}$$

Примеры логик, допускающих (опр) фильтрацию

Пример

Frames(L) и даже Models(L) допускают опр. фильтрацию для логик:

- K, KD, KT, KB, KTB, K4, S4, S5, S4.1 и многих других;
- $\mathsf{K} + (\Box p \to \Box^n p)$, для любого $n \geq 2$;
- $\mathsf{K} + (\Box^m p \to \Box p)$, для любого $m \geq 2$.

Примеры логик, допускающих (опр) фильтрацию

Пример

Frames(L) и даже Models(L) допускают опр. фильтрацию для логик:

- K, KD, KT, KB, KTB, K4, S4, S5, S4.1 и многих других;
- $\mathrm{K} + (\Box p \to \Box^n p)$, для любого $n \geq 2$;
- $\mathrm{K} + (\Box^m p \to \Box p)$, для любого $m \geq 2$.

Лемма

(*a*) Frames(L) *допускает фильтрацию & L полна $\Rightarrow$ L обладает FMP.*

Примеры логик, допускающих (опр) фильтрацию

Пример

Frames(L) и даже Models(L) допускают опр. фильтрацию для логик:

- K, KD, KT, KB, KTB, K4, S4, S5, S4.1 и многих других;
- $K + (\Box p \to \Box^n p)$, для любого $n \geq 2$;
- $K + (\Box^m p \to \Box p)$, для любого $m \geq 2$.

Лемма

(*а*) Frames(L) *допускает фильтрацию &* L *полна* $\Rightarrow$ L *обладает FMP.*

(*б*) Models(L) *допускает фильтрацию* $\Rightarrow$ L *имеет FMP* $\Rightarrow$ L *полна.*

Основной результат (две версии)

Основной результат, версия 1

Пусть

- логика L — *канонческая*,
- класс ее шкал $\mathrm{Frames}(L)$ *допускает* **определимую** *фильтрацию*.

Тогда

- логика L^+ полна. Более того,
- класс $\mathrm{Frames}(L^+)$ тоже *допускает* **определимую** *фильтрацию*,
- значит, логика L^+ обладает *FMP*,
- значит, L^+ — *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Основной результат (две версии)

Основной результат, версия 2

Пусть

- класс моделей $\mathrm{Models}(L)$ *допускает* **определимую** *фильтрацию*.

Тогда

- логика L^+ полна. Более того,
- класс $\mathrm{Models}(L^+)$ тоже *допускает* **определимую** *фильтрацию*,
- значит, логика L^+ обладает *FMP*,
- значит, L^+ — *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Основной результат (две версии)

Основной результат, версия 2

Пусть

- класс моделей Models(L) *допускает* **определимую** *фильтрацию*.

Тогда

- логика L^+ полна. Более того,
- класс Models(L^+) тоже *допускает* **определимую** *фильтрацию*,
- значит, логика L^+ обладает *FMP*,
- значит, L^+ — *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Основной результат (две версии)

Основной результат, версия 2

Пусть

- класс моделей Models(L) *допускает* **определимую** *фильтрацию*.

Тогда

- логика L^+ полна. Более того,
- класс Models(L^+) тоже *допускает* **определимую** *фильтрацию*,
- значит, логика L^+ обладает *FMP*,
- значит, L^+ — *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Итак, общая схема результата такова:

Models(L) доп. опр. фильтрацию $\Rightarrow$ *Models*(L^+) доп. опр. фильтрацию

Основной результат (две версии)

Основной результат, версия 2

Пусть

- класс моделей Models(L) *допускает* **определимую** *фильтрацию*.

Тогда

- логика L^+ полна. Более того,
- класс Models(L^+) тоже *допускает* **определимую** *фильтрацию*,
- значит, логика L^+ обладает *FMP*,
- значит, L^+ — *разрешима* (если L была кон. аксиоматизируема).

Итак, общая схема результата такова:

Models(L) доп. опр. фильтрацию $\Rightarrow$ *Models*(L^+) доп. опр. фильтрацию

Это аргумент можно «итерировать»!

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$(\mathrm{A3}) \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad (\text{Индукция})$$

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ — модель с двумя отношениями R и S,

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ — модель с двумя отношениями R и S, и $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$ — конечное (Sub-замкн.) мн-во модальных формул.

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ *— модель с двумя отношениями* R *и* S*,*
и $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$ *— конечное (Sub-замкн.) мн-во модальных формул.*
$\widehat{F}^{\min} := (\widehat{W}/{\equiv_\Phi}, R^{\min}, S^{\min})$ *— мин. фильтрованная через* $\equiv_\Phi$ *шкала.*

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ *— модель с двумя отношениями* R *и* S*,*
и $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$ *— конечное (Sub-замкн.) мн-во модальных формул.*
$\widehat{F}^{\min} := (\widehat{W}/{\equiv_\Phi}, R^{\min}, S^{\min})$ *— мин. фильтрованная через* $\equiv_\Phi$ *шкала.*
Тогда:

$$M \models (\mathrm{A3})^* \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{F}^{\min} \models (\mathrm{A3}).$$

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ *— модель с двумя отношениями* R *и* S*,*
и $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$ *— конечное (Sub-замкн.) мн-во модальных формул.*
$\widehat{F}^{\min} := (\widehat{W}/{\equiv_\Phi}, R^{\min}, S^{\min})$ *— мин. фильтрованная через* $\equiv_\Phi$ *шкала.*
Тогда:

$$M \models \text{(A3)}^* \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{F}^{\min} \models \text{(A3)}.$$

Это единственное место, где аксиома индукции (A3) вступает в игру.

Аксиома индукции встречается с опр. фильтрацией

Пишем $M \models A^*$, если $M \models \sigma(A)$ для всех подстановок σ.

Ключевой факт 2: особенность фильтрации аксиомы индукции:

$$\text{(A3)} \qquad \boxplus(p \to \Box p) \to (\Box p \to \boxplus p) \qquad \text{(Индукция)}$$

Лемма

Пусть $M = (W, R, S, V)$ *— модель с двумя отношениями* R *и* S*,*
и $\Phi \subseteq \mathrm{Fm}(\Box, \boxplus)$ *— конечное (Sub-замкн.) мн-во модальных формул.*
$\widehat{F}^{\min} := (\widehat{W}/{\equiv_\Phi}, R^{\min}, S^{\min})$ *— мин. фильтрованная через* $\equiv_\Phi$ *шкала.*
Тогда:

$$M \models (\text{A3})^* \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{F}^{\min} \models (\text{A3}).$$

Это единственное место, где аксиома индукции (A3) вступает в игру.
(помимо того, что она задаёт класс шкал вида $F = (W, R, R^+)$)

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.
   Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \ldots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \dots, [a_n]$.
   Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \dots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).
   Это test-free-PDL(L) глубины $\leq n$. Обозначим ее: $L^{(n)}$.

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.
   Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \ldots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).
   Это test-free-PDL(L) глубины $\leq n$. Обозначим ее: $L^{(n)}$.

Теорема

Models(L) допускает определимую фильтрацию $\Longrightarrow$ Models($L^{(n)}$) тоже.

2. *Строгая определимая* фильтрация — через $\Phi = \Gamma$, то есть $M/\equiv_\Gamma$.

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.
Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \ldots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).
Это test-free-PDL(L) глубины $\leq n$. Обозначим ее: $L^{(n)}$.

Теорема

Models(L) допускает определимую фильтрацию $\Longrightarrow$ Models($L^{(n)}$) тоже.

2. *Строгая определимая* фильтрация — через $\Phi = \Gamma$, то есть $M/{\equiv_\Gamma}$.
Допускают строгую (опр.) фильтрацию: K, KT, K4, S4, S5 и т.д.

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.
   Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \ldots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).
   Это test-free-PDL(L) глубины $\leq n$. Обозначим ее: $L^{(n)}$.

Теорема

Models(L) допускает определимую фильтрацию $\Longrightarrow$ Models($L^{(n)}$) тоже.

2. *Строгая определимая* фильтрация — через $\Phi = \Gamma$, то есть $M/{\equiv_\Gamma}$.
   Допускают строгую (опр.) фильтрацию: K, KT, K4, S4, S5 и т.д.

Теорема

Пусть

- логики $L_1, \ldots, L_m$ — канонические,
- каждый из классов Frames(L_i) допускает *опр.* фильтрацию.

Приложения

1. Пусть L — полимодальная логика с $[a_1], \ldots, [a_n]$.
   Добавим к L модальности $[e]$ для всех выражений e вложенности $\leq n$ построенные из $a_1, \ldots, a_n$ с помощью $\cup$, $\circ$ и $+$ (или $*$).
   Это test-free-PDL(L) глубины $\leq n$. Обозначим ее: $L^{(n)}$.

Теорема

Models(L) допускает определимую фильтрацию $\Longrightarrow$ Models($L^{(n)}$) тоже.

2. *Строгая определимая* фильтрация — через $\Phi = \Gamma$, то есть $M/{\equiv_\Gamma}$.
   Допускают строгую (опр.) фильтрацию: K, KT, K4, S4, S5 и т.д.

Теорема

Пусть

- логики $L_1, \ldots, L_m$ — канонические,
- каждый из классов Frames(L_i) допускает *опр.* фильтрацию.

Тогда $(L_1 * \ldots * L_m)^{(n)}$ полна и обладает FMP. ($\Rightarrow$ разрешима)

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\implies$ L^+ полна и ДОФ?*

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\Longrightarrow$ L^+ полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: L *полна и ДОФ* $\Longrightarrow$ L^+ *полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: L *полна и ДОФ* $\Longrightarrow$ L^+ *полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание $(S^{n+1} \subseteq S)$ — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\Longrightarrow$ L^+ полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание ($S^{n+1} \subseteq S$) — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n \boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$
   3. Симметричное замыкание $R^s = R \cup R^{-1}$: Lloyd Humberstone (2020)
      $$\boxdot p \to \Box p, \qquad p \to \Box \diamond\!\!\!\!\diamond\, p, \qquad p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p).$$

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\implies$ L^+ полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание $(S^{n+1} \subseteq S)$ — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n \boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$
   3. Симметричное замыкание $R^s = R \cup R^{-1}$: Lloyd Humberstone (2020)
      $$\boxdot p \to \Box p, \qquad p \to \Box \diamond p, \qquad p \wedge \Box q \;\to\; \boxdot(q \vee \Diamond p).$$
   4. Евклидово зам. R^e? Экв-замыкание? Другие хорновы зам.?

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\implies$ L^{+} полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание ($S^{n+1} \subseteq S$) — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n \boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$
   3. Симметричное замыкание $R^s = R \cup R^{-1}$: Lloyd Humberstone (2020)
      $$\boxcircle p \to \Box p, \qquad p \to \Box \diamondcircle p, \qquad p \wedge \Box q \to \boxcircle(q \vee \Diamond p).$$
   4. Евклидово зам. R^e? Экв-замыкание? Другие хорновы зам.?
      Уже вопрос с определимостью не так очевиден:
      Класс всех шкал вида (W, R, R^e) — модально определим?
      Класс всех шкал вида $(W, R, R^э)$ — модально определим?

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\implies$ L^+ полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание $(S^{n+1} \subseteq S)$ — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n \boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$
   3. Симметричное замыкание $R^s = R \cup R^{-1}$: Lloyd Humberstone (2020)
      $$\boxdot p \to \Box p, \qquad p \to \Box \diamonddot p, \qquad p \wedge \Box q \ \to\ \boxdot(q \vee \Diamond p).$$
   4. Евклидово зам. R^e? Экв-замыкание? Другие хорновы зам.?
      Уже вопрос с определимостью не так очевиден:
      Класс всех шкал вида (W, R, R^e) — модально определим?
      Класс всех шкал вида $(W, R, R^э)$ — модально определим?
      Для каких хорновых зам. он модально определим? Аксиоматика?

Дальнейшие направления исследований

1. Можно ли вместо «каноничности» L требовать лишь ее полноту?
   Вопрос 1: *L полна и ДОФ $\Longrightarrow$ L^+ полна и ДОФ?*
2. **Вопрос 2:** *Определимые фильтрации сильнее обычных?*
3. Модальности для других замыканий отношения R:
   1. рефлексивно-транзитивное замыкание — те же результаты:
      $$\boxplus p \to p, \quad \boxplus p \to \Box\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box p) \to (p \to \boxplus p).$$
   2. n-транзитивное замыкание ($S^{n+1} \subseteq S$) — те же результаты:
      $$\boxplus p \to \Box p, \quad \boxplus p \to \Box^n\boxplus p, \quad \boxplus(p \to \Box^n p) \to (\Box p \to \boxplus p).$$
   3. Симметричное замыкание $R^s = R \cup R^{-1}$: Lloyd Humberstone (2020)
      $$\boxdot p \to \Box p, \quad p \to \Box\diamondsuit p, \quad p \wedge \Box q \to \boxdot(q \vee \Diamond p).$$
   4. Евклидово зам. R^e? Экв-замыкание? Другие хорновы зам.?
      Уже вопрос с определимостью не так очевиден:
      Класс всех шкал вида (W, R, R^e) — модально определим?
      Класс всех шкал вида $(W, R, R^э)$ — модально определим?
      Для каких хорновых зам. он модально определим? Аксиоматика?

Спасибо!