Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Полная система инвариантов многомерного кубика Рубика

Научный руководитель – Канель-Белов Алексей Яковлевич

Исаев Роман Дмитриевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: einsteinewton@mail.ru

В 1974 году Эрне Рубиком был создан кубик Рубика. Его изобретение остаётся одной из самых известных головоломок и по сей день. Несмотря на относительно недавнее появление кубик Рубика стал уже классическим объектом математики, в частности, теории групп. В последнее же время появилось множество вариаций этой головоломки: пирамидка, мегаминкс и, в том числе, многомерный куб. Последний выделяется на фоне трёхмерного новыми групповыми эффектами, возникающими в пространствах с размерностью не менее 5 и длиной ребра не менее 4.

Кубик Рубика интересен ещё и тем, что обладает системой инвариантов - величин, которые сохраняются при вращении "слоёв" кубика, но могут не сохраняться при изменении положений и ориентаций элементов головоломки "вручную". Всвязи с этим возникают попарно несвязанные состояния куба. При изучении вопроса поиска такой системы подразумевается её полнота. То есть, лишних, как и недостающих инвариантов, у полной системы нет. Другой же вопрос, связанный с головоломкой, заключается в поиске оптимального алгоритма сборки (алгоритма Бога) и числа его действий (числа Бога).

Таким образом, изучение кубика Рубика приводит к следующим двум важным проблемам:

1.Описание полной системы инвариантов.

2.Поиск оптимального алгоритма и соответствующего числа Бога.

На данный момент ни одна из этих проблем не была полностью решена в общем случае, но в первой проблеме продвижения оказались успешнее, чем во второй.

Полная система инвариантов трёхмерного кубика Рубика с произвольной длиной ребра была описана в [3]. Многомерный случай был решён полностью лишь для длины ребра 2 и 3, см., например, [1].
Точный ответ на второй вопрос был получен только в случае стандартного кубика Рубика (с ребром 3) при помощи вычислительной техники и оптимизационного перебора состояний головоломки. Тем не менее, существуют некоторые нетривиальные оценки в трёхмерном случае для произвольной длины ребра, см. [2].

В данной работе описана структура многомерного кубика Рубика, найдена в общем случае полная система инвариантов и приведен алгоритм сборки куба. Алгоритм не является оптимальным, однако даёт доказательство полноты системы. Помимо этого, оценка работы данного алгоритма даёт и тривиальную оценку на число Бога сверху. Некоторые результаты, полученные в ходе изучения, могут быть распространены и на другие головоломки.

Источники и литература

1) Левашев Владислав, Обобщение группы Кубика Рубика на n-мерный случай, 2019
2) Ahmad Kaleem and Ahsan Kaleem, On Algorithms for Solving the Rubik's Cube, 2020
3) Stefano Bonzio, Andrea Loi, Luisa Peruzzi, On the nxnxn Rubik's Cube, 2017