Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

V-реализуемость и интуиционистская логика

Научный руководитель – Плиско Валерий Егорович

Коновалов Александр Юрьевич
Выпускник (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: alexandr.konoval@gmail.com

Пусть V — произвольное счетное множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V-функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n-местных V-функций. А именно, определено множество индексов $\mathsf{I}_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in \mathsf{I}_n^V$ ставит в соответствие n-местную V-функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n-местная V-функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in \mathsf{I}_n^V$.

Фиксируем произвольную двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, для которых выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t'),\ \mathsf{p}_2(t'')$ обычно будем опускать скобки.

Для множества функций V постулируем выполнение следующих свойств:

1) V содержит функции c, p_1, p_2 и семейство функций проекции I_n^i $(n \geq 1,\ 1 \leq i \leq n)$;

2) V содержит все 0-местные функции-константы k, и при этом существует такая V-функция s, что имеет место $s(k) \in \mathsf{I}_0$ и $\varphi_{s(k)}^{V,\,0} \simeq k$, т.е. индекс функции-константы k может быть получен V-эффективно;

3) композиция V-функций есть V-функция, индекс которой может быть получен V-эффективно: для любых натуральных числе $n, m_1, \ldots, m_n$ найдется такая $(n+1)$-местная V-функция s, что для всех $e \in \mathsf{I}_n^V, e_1 \in \mathsf{I}_{m_1}^V, \ldots, e_n \in \mathsf{I}_{m_n}^V$ верно $s(e, e_1, \ldots, e_n) \in \mathsf{I}_m^V$ и имеет место $\varphi_{s(e,e_1,\ldots,e_n)}^{V,\,m}(x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_e^{V,\,n}(\varphi_{e_1}^{V,\,m_1}(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \varphi_{e_n}^{V,\,m_n}(x_1, \ldots, x_{m_n}))$, где $m = \max\limits_{1 \leq i \leq n} m_i$;

4) «функция-условие» двух V-функций есть V-функция, индекс которой может быть получен V-эффективно: для каждого натурального числа n найдется такая V-функция s, что для всех натуральных чисел d и $e_1, e_2 \in \mathsf{I}_n^V$ верно $s(e_1, e_2) \in \mathsf{I}_n^V$ и

$$\varphi_{s(e_1,e_2)}^{V,\,n+1}(x_1, \ldots, x_n, d) \simeq \begin{cases} \varphi_{e_1}^{V,\,n+1}(x_1, \ldots, x_n, d), & \text{если } \mathsf{p}_1 d = 0; \\ \varphi_{e_2}^{V,\,n+1}(x_1, \ldots, x_n, d), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем рассматривать язык логики предикатов, расширенный константами $0, 1, 2, \ldots$ Термы этого языка суть константы и предметные переменные, атомы — выражения вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ — термы, P — предикатный символ соответствующей валентности. Предикатные формулы строятся обычным образом из логических констант $\top$, $\bot$ и атомов при помощи логических связок $\wedge,\ \vee,\ \rightarrow$ и кванторов $\forall,\ \exists$.

Определим понятие V-реализуемости в духе абсолютной реализуемости [n1]. Назовем *n-местным обобщенным предикатом* всякую функцию типа $\mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, где $2^{\mathbb{N}}$ — множество всех подмножеств натурального ряда. Будем говорить, что отображение f является *оценкой* предикатной формулы A, если отображение f каждому предикатному символу из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. Для каждого натурального числа e, замкнутой предикатной формулы A и оценки f формулы A определим отношение $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$:

- неверно $e\ \mathbf{r}_f^V\ \bot$, и верно $e\ \mathbf{r}_f^V\ \top$;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ P(a_1,\ldots,a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1,\ldots,a_n)$, если P — n-местный предикатный символ;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ \forall x_1,\ldots,x_n\, (\Phi(x_1,\ldots,x_n) \to \Psi(x_1,\ldots,x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_{n+1}^V$ и для всех натуральный чисел $b,\ a_1,\ldots,a_n$, если $b\ \mathbf{r}_f^V\ \Phi(a_1,\ldots,a_n)$, то определено $\varphi_e^{V,\ n+1}(a_1,\ldots,a_n,b)$ и $\varphi_e^{V,\ n+1}(a_1,\ldots,a_n,b)\ \mathbf{r}_f^V\ \Psi(a_1,\ldots,a_n)$;
- $e\ \mathbf{r}_f^V\ \forall x_1,\ldots,x_n\, \Phi \rightleftharpoons e\ \mathbf{r}_f^V\ \forall x_1,\ldots,x_n\, (\top \to \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Замкнутую предикатную формулу A назовем *слабо V-реализуемой*, если для каждой оценки f формулы A найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$. Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *равномерно V-реализуемой*, если найдется такое натуральное число e, что для любой оценки f формулы A имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ A$.

Пусть $f,\ f'$ — частичные функции типа $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Будем говорить, что функция f' является *частичным доопределением* функции f, если для всех натуральных чисел $a_1,\ldots,a_n$ всякий раз, когда определено $f(a_1,\ldots,a_n)$, определено и $f'(a_1,\ldots,a_n)$, и имеет место $f(a_1,\ldots,a_n) = f'(a_1,\ldots,a_n)$.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны.*

- *Интуиционистская логика корректна относительно семантики равномерной V-реализуемости;*
- *Универсальная функция для всех одноместных V-функций имеет частичное доопределение, которое является V-функцией;*
- *Формула $\forall x\, (Q(x) \to \forall y\, (R(x,y) \to \exists z\, P(x,y,z))) \to \forall y\, \forall x\, (Q(x) \wedge R(x,y) \to \exists z\, P(x,y,z))$ является слабо V-реализуемой.*

Источники и литература

1) Плиско В. Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983. т. 47. № 2. стр. 315—334.