

Некорректность базисной логики предикатов относительно сильного варианта строгой примитивно-рекурсивной реализуемости

Научный руководитель – Плиско Валерий Егорович

Коновалов Александр Юрьевич

Выпускник (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории
алгоритмов, Москва, Россия

E-mail: alexandr.konoval@gmail.com

Понятие строгой примитивно-рекурсивной реализуемости было определено З. Дамьяновичем [1]. В работе [2] В.Е. Плиско доказал, что интуиционистская логика предикатов некорректна относительно семантики строгой примитивно-рекурсивной реализуемости, тогда как базисная пропозициональная логика корректна. Мы покажем, что базисная логика предикатов *BQC* [3] некорректна относительно сильного варианта строгой примитивно-рекурсивной реализуемости.

Пусть $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ — иерархия примитивно-рекурсивных функций, описанная в [4]. При этом для каждого класса E_n имеется универсальная функция u_n , обладающая следующими свойствами: $u_n \notin E_n$; $u_n \in E_{n+1}$; $u_n(e, 2^x) = \varphi(x)$ если e — номер одноместной функции $\varphi \in E_n$. Через I^n обозначаем множество всех номеров функций из E_n .

Согласно [1] определим отношение $e \mathbf{r}_i A$ (натуральное число e примитивно-рекурсивно реализует замкнутую арифметическую формулу A на i -ом уровне иерархии):

- $e \mathbf{r}_i A \iff e = 0$ и A истинна, если A — атомарная формула;
- $e \mathbf{r}_i \Phi \wedge \Psi \iff p_1 e \mathbf{r}_i \Phi$ и $p_2 e \mathbf{r}_i \Psi$;
- $e \mathbf{r}_i \Phi \vee \Psi \iff (p_1 e = 0$ и $p_2 e \mathbf{r}_i \Phi)$ или $(p_1 e = 1$ и $p_2 e \mathbf{r}_i \Psi)$;
- $e \mathbf{r}_i \Phi \rightarrow \Psi \iff e \in I^i$ и $\forall j \geq i (u_i(e, 2^j) \in I^j)$, и $\forall a \forall j \geq i (a \mathbf{r}_j \Phi \Rightarrow u_j(u_i(e, 2^j), 2^a) \mathbf{r}_i \Psi)$.
- $e \mathbf{r}_i \exists x \Phi(x) \iff p_2 e \mathbf{r}_i \Phi(p_1 e)$;
- $e \mathbf{r}_i \forall x \Phi(x) \iff e \in I^i$ и $\forall a (u_i(e, 2^a) \mathbf{r}_i \Phi(a))$.

Пусть f — n -местная функция из класса E_i . Согласно [2] распространим отношение \mathbf{r}_i на секвенции арифметических формул:

$$f \mathbf{r}_i \Phi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n) \iff \forall k_1, \dots, k_n, e \forall j \geq i (e \mathbf{r}_j \Phi(\bar{k}) \implies f(\bar{k}, e) \mathbf{r}_j \Psi(\bar{k})).$$

Секвенцию предикатных формул $A \Rightarrow B$ назовем сильно примитивно-рекурсивной реализуемой, если найдутся такие натуральные числа e и i , что имеет место $e \mathbf{r}_i A' \Rightarrow B'$ для любых арифметических примеров A' и B' предикатных формул A и B .

Теорема 1. *Секвенция $\forall x \forall x' (P(z, x) \rightarrow \exists y Q(z, x, y)) \Rightarrow \forall x (P(z, x) \rightarrow \exists y Q(z, x, y))$ не является сильно примитивно-рекурсивной реализуемой.*

Так как секвенция из теоремы 1 является аксиомой базисной логики предикатов *BQC*, исчисление *BQC* не является корректным относительно сильной примитивно-рекурсивной реализуемости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00670.

Источники и литература

- 1) Damnjanovic Z. Strictly primitive recursive realizability // I. Journal of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59. p. 1210-1227.
- 2) Plisko V. Primitive recursive realizability and basic propositional logic // Utrecht University, Logic Group Preprint Series. 2007. Vol. 261. 27 pp.
- 3) Ruitenburg W. Basic predicate calculus // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1998. Vol. 39. N. 1. p. 18-46.
- 4) Axt P. Enumeration and the Grzegorzcyk hierarchy // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Vol. 9. p. 53-65.