Строгая PR-реализуемость и базисная логика

А. Ю. Коновалов

Механико-математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

XXVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»
Москва, 2021

Иерархия Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций

Примитивно-рекурсивными называют функции натурального аргумента, которые могут быть получены с помощью операций подстановки и рекурсии из следующих исходных функций: функции-константы $O(x) = 0$, функции прибавления единицы $S(x) = x + 1$ и семейства функций проекции $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ $(n = 1, 2, ..., \; 1 \le k \le n)$.

Иерархия Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций

Примитивно-рекурсивными называют функции натурального аргумента, которые могут быть получены с помощью операций подстановки и рекурсии из следующих исходных функций: функции-константы $O(x) = 0$, функции прибавления единицы $S(x) = x + 1$ и семейства функций проекции $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ $(n = 1, 2, ..., \ 1 \leq k \leq n)$.

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \rightleftharpoons 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{a_n}$
$\mathrm{p}_k(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \rightleftharpoons a_k$

Иерархия Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций

Примитивно-рекурсивными называют функции натурального аргумента, которые могут быть получены с помощью операций подстановки и рекурсии из следующих исходных функций: функции-константы $O(x) = 0$, функции прибавления единицы $S(x) = x + 1$ и семейства функций проекции $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ $(n = 1, 2, ..., \ 1 \leq k \leq n)$.

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \rightleftharpoons 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{a_n}$
$\mathrm{p}_k(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \rightleftharpoons a_k$

$$\mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \ldots$$

Иерархия Гжегорчика примитивно-рекурсивных функций

Примитивно-рекурсивными называют функции натурального аргумента, которые могут быть получены с помощью операций подстановки и рекурсии из следующих исходных функций: функции-константы $O(x) = 0$, функции прибавления единицы $S(x) = x + 1$ и семейства функций проекции $I_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$ $(n = 1, 2, ..., \ 1 \leq k \leq n)$.

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \rightleftharpoons 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot \dots \cdot q_n^{a_n}$
$\mathrm{p}_k(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) \rightleftharpoons a_k$

$$\mathbf{E}_0 \subset \mathbf{E}_1 \subset \dots$$

O, S, I_k^n, $\mathrm{p}_k \in \mathbf{E}_0$;
$x + y$, $x \cdot y$, x^y, $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbf{E}_0$.

Нумерация примитивно-рекурсивных функций

I^k — множество номеров функций из $\mathbf{E}_k$.

φ_e^k — функция из $\mathbf{E}_k$ с номером e ($e \in \mathsf{I}^k$).

Нумерация примитивно-рекурсивных функций

I^k — множество номеров функций из $\mathbf{E}_k$.

φ_e^k — функция из $\mathbf{E}_k$ с номером e ($e \in \mathsf{I}^k$).

I_n^k — множество номеров n-местных функций из $\mathbf{E}_k$.

$$\mathsf{I}^0 \subset \mathsf{I}^1 \subset \ldots$$

Язык арифметики

- константа 0;
- функциональные символы для всех PR-функций ;
- предикатный символ $=$;
- логические константы $\top$, $\bot$;
- логические связки $\wedge$, $\vee$, $\to$;
- кванторы $\forall$, $\exists$;
- скобки $($, $)$.

Строгая примитивно-рекурсивная реализуемость ($e\ \mathbf{r}_k\ \Phi$)

- $e\ \mathbf{r}_k\ At \rightleftharpoons e = 0$ и формула At истинна в стандартной интерпретации арифметики, где At — атомарная формула;

Строгая примитивно-рекурсивная реализуемость ($e \ \mathbf{r}_k \ \Phi$)

- $e \ \mathbf{r}_k \ At \rightleftharpoons e = 0$ и формула At истинна в стандартной интерпретации арифметики, где At — атомарная формула;
- $e \ \mathbf{r}_k \ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathrm{p}_1 e \ \mathbf{r}_k \ \Phi$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_k \ \Psi$;
- $e \ \mathbf{r}_k \ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathrm{p}_1 e = 0$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_k \ \Phi)$ или $(\mathrm{p}_1 e = 1$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_k \ \Psi)$;

Строгая примитивно-рекурсивная реализуемость ($e\ \mathbf{r}_k\ \Phi$)

- $e\ \mathbf{r}_k\ At \rightleftharpoons e = 0$ и формула At истинна в стандартной интерпретации арифметики, где At — атомарная формула;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathrm{p}_1 e\ \mathbf{r}_k\ \Phi$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathrm{p}_1 e = 0$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Phi)$ или $(\mathrm{p}_1 e = 1$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \to \Psi) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}_1^k$ и $\forall j \geq k :\ \varphi_e^k(j) \in \mathrm{I}_1^j$ и

$$\forall j \geq k\ \forall a :\ a\ \mathbf{r}_j\ \Phi \Longrightarrow \varphi^j_{\varphi_e^k(j)}(a)\ \mathbf{r}_j\ \Psi;$$

Строгая примитивно-рекурсивная реализуемость ($e\ \mathbf{r}_k\ \Phi$)

- $e\ \mathbf{r}_k\ At \rightleftharpoons e = 0$ и формула At истинна в стандартной интерпретации арифметики, где At — атомарная формула;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathrm{p}_1 e\ \mathbf{r}_k\ \Phi$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathrm{p}_1 e = 0$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Phi)$ или $(\mathrm{p}_1 e = 1$ и $\mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{r}_k\ (\Phi \to \Psi) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}_1^k$ и $\forall j \geq k :\ \varphi_e^k(j) \in \mathrm{I}_1^j$ и
$$\forall j \geq k\ \forall a :\ a\ \mathbf{r}_j\ \Phi \Longrightarrow \varphi^j_{\varphi_e^k(j)}(a)\ \mathbf{r}_j\ \Psi;$$
- $e\ \mathbf{r}_k\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathrm{p}_2 e\ \mathbf{r}_k\ \Phi(\mathrm{p}_1 e)$;

Строгая примитивно-рекурсивная реализуемость ($e \mathbf{r}_k \Phi$)

- $e \mathbf{r}_k At \rightleftharpoons e = 0$ и формула At истинна в стандартной интерпретации арифметики, где At — атомарная формула;
- $e \mathbf{r}_k (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathrm{p}_1 e \mathbf{r}_k \Phi$ и $\mathrm{p}_2 e \mathbf{r}_k \Psi$;
- $e \mathbf{r}_k (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathrm{p}_1 e = 0$ и $\mathrm{p}_2 e \mathbf{r}_k \Phi)$ или $(\mathrm{p}_1 e = 1$ и $\mathrm{p}_2 e \mathbf{r}_k \Psi)$;
- $e \mathbf{r}_k (\Phi \to \Psi) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}_1^k$ и $\forall j \geq k : \varphi_e^k(j) \in \mathrm{I}_1^j$ и
$$\forall j \geq k \, \forall a : \; a \mathbf{r}_j \Phi \Longrightarrow \varphi^j_{\varphi_e^k(j)}(a) \mathbf{r}_j \Psi;$$
- $e \mathbf{r}_k \exists x \Phi(x) \rightleftharpoons \mathrm{p}_2 e \mathbf{r}_k \Phi(\mathrm{p}_1 e)$;
- $e \mathbf{r}_k \forall x \Phi(x) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}_1^k$ и $\forall a : \varphi_e^k(a) \mathbf{r}_k \Phi(a)$.

$$\Phi \text{ — строго PR-реализуема} \rightleftharpoons \exists e, k : \; e \mathbf{r}_k \Phi$$

Язык логики предикатов

- предикатные символы P_i^n $(i, n \geq 0)$;
- константы $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;
- логические константы $\bot$, $\top$;
- логические связки $\wedge$, $\vee$, $\to$;
- кванторы $\forall$, $\exists$.
- скобки $($, $)$.

Язык логики предикатов

- предикатные символы P_i^n $(i, n \geq 0)$;
- константы $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;
- логические константы $\bot$, $\top$;
- логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$;
- кванторы $\forall$, $\exists$.
- скобки $($, $)$.

Строгая PR-реализуемость для предикатных формул

$A(P_1, \ldots, P_n)$ — строго PR-реализуема, если

$$\exists e, k\ \forall \Phi_1, \ldots, \Phi_n :\ e\ \mathbf{r}_k\ A(\Phi_1, \ldots, \Phi_n).$$

Аксиомы базисной логики предикатов BQC

A1) $A \Rightarrow A$;

A2) $A \Rightarrow \top$;

A3) $\bot \Rightarrow A$;

A4) $A \wedge \exists x\, B \Rightarrow \exists x\, (A \wedge B)$, где переменная x не свободна в A;

A5) $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

A6) $\forall \overline{x}{:}A.\ B \wedge \forall \overline{x}{:}B.\ C \Rightarrow \forall \overline{x}{:}A.\ C$;

A7) $\forall \overline{x}{:}A.\ B \wedge \forall \overline{x}{:}A.\ C \Rightarrow \forall \overline{x}{:}A.\ (B \wedge C)$;

A8) $\forall \overline{x}{:}B.\ A \wedge \forall \overline{x}{:}C.\ A \Rightarrow \forall \overline{x}{:}B \vee C.\ A$;

A9) $\forall \overline{x}{:}A.\ B \Rightarrow \forall \overline{x}{:}[\overline{y}/\overline{x}]A.\ [\overline{y}/\overline{x}]B$;

A10) $\forall \overline{x}{:}A.\ B \Rightarrow \forall \overline{y}{:}A.\ B$, где переменные из $\overline{y}$ не входят свободно в $\forall \overline{x}{:}A.\ B$;

A11) $\forall \overline{x}, y{:}B.\ A \Rightarrow \forall \overline{x}{:}\exists y\, B.\ A$, где переменная y не свободна в A.

Правила вывода базисной логики предикатов BQC

R1) $\dfrac{A \Rightarrow B \;\; B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$;

R2) $\dfrac{A \Rightarrow B \;\; A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}$;

R3) $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B}$ (а), $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow C}$ (б);

R4) $\dfrac{B \Rightarrow A \;\; C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A}$;

R5) $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$ (а), $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A}$ (б);

R6) $\dfrac{A \Rightarrow B}{[\overline{y}/\overline{x}]\, A \Rightarrow [\overline{y}/\overline{x}]\, B}$;

R7) $\dfrac{B \Rightarrow A}{\exists x\, B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R8) $\dfrac{\exists x\, B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R9) $\dfrac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \overline{x}{:}B.\, C}$, где каждая переменная из списка $\overline{x}$ не свободна в A.

Строгая PR-реализуемость для секвенций арифметических формул

$e \ \mathbf{r}_k \ \Phi(\overline{x}) \Rightarrow \Psi(\overline{x}) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}^k_{n+1}$ и

$$\forall \overline{a}, b \, \forall j \geq k : \ b \ \mathbf{r}_j \ \Phi(\overline{a}) \Longrightarrow \varphi^k_e(\overline{a}, b) \ \mathbf{r}_j \ \Psi(\overline{a}),$$

где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, а $\overline{a}$ — список натуральных чисел длины n.

Строгая PR-реализуемость для секвенций арифметических формул

$e \, \mathbf{r}_k \, \Phi(\overline{x}) \Rightarrow \Psi(\overline{x}) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}^k_{n+1}$ и

$$\forall \overline{a}, b \, \forall j \geq k : \; b \, \mathbf{r}_j \, \Phi(\overline{a}) \Longrightarrow \varphi^k_e(\overline{a}, b) \, \mathbf{r}_j \, \Psi(\overline{a}),$$

где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, а $\overline{a}$ — список натуральных чисел длины n.

Строгая PR-реализуемость для секвенций предикатных формул

$A \Rightarrow B$ — строго PR-реализуема, если

$$\exists e, k \, \forall A', B' : \; e \, \mathbf{r}_k \, A' \Rightarrow B'.$$

Основной результат

Теорема

Базисная логика BQC *некорректна относительна относительно строгой* PR*-реализуемости.*

Основной результат

Теорема

Базисная логика BQC *некорректна относительна относительно строгой* PR-*реализуемости.*

$$\forall x\, \forall x' (P(z,x) \to \exists y\, Q(z,x,y)) \Rightarrow \forall x\, (P(z,x) \to \exists y\, Q(z,x,y))$$

Вариант строгой PR-реализуемость для базисной логики

- $e \; \mathbf{r}'_k \; \forall \overline{x}\, (\Phi(\overline{x}) \to \Psi(\overline{x})) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}^k_{n+1}$ и

$$\forall \overline{a}, b \, \forall j \geq k : \; b \; \mathbf{r}'_j \; \Phi(\overline{a}) \Longrightarrow \varphi^k_e(\overline{a}, b) \; \mathbf{r}'_j \; \Psi(\overline{a}),$$

  где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, а $\overline{a}$ — список натуральных чисел длины n ($n \geq 0$).
- $e \; \mathbf{r}'_k \; \forall \overline{x}\, \Psi(\overline{x}) \rightleftharpoons e \; \mathbf{r}'_k \; \forall \overline{x}\, (\top \to \Psi(\overline{x}))$,

  если формула $\Psi(\overline{x})$ не начинается с квантора $\forall$ и связка $\to$ не является главной в ней.

Вариант строгой PR-реализуемость для базисной логики

- $e \ \mathbf{r}'_k \ \forall \overline{x} \, (\Phi(\overline{x}) \to \Psi(\overline{x})) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}^k_{n+1}$ и

$$\forall \overline{a}, b \, \forall j \geq k : \ b \ \mathbf{r}'_j \ \Phi(\overline{a}) \Longrightarrow \varphi^k_e(\overline{a}, b) \ \mathbf{r}'_j \ \Psi(\overline{a}),$$

  где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, а $\overline{a}$ — список натуральных чисел длины n $(n \geq 0)$.
- $e \ \mathbf{r}'_k \ \forall \overline{x} \, \Psi(\overline{x}) \rightleftharpoons e \ \mathbf{r}'_k \ \forall \overline{x} \, (\top \to \Psi(\overline{x}))$,

  если формула $\Psi(\overline{x})$ не начинается с квантора $\forall$ и связка $\to$ не является главной в ней.

Теорема

Базисная логика BQC корректна относительна относительно измененной строгой PR-реализуемости.