ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ
к курсу "Математическая логика и алгоритмы" (2014)

1. Постройте формулу 1-го порядка без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.

2. Существует ли формула 1-го порядка без равенства, имеющая 2-элементную модель, но не имеющая 3-элементных моделей?

3. Рассмотрим сигнатуру абелевых групп: (0, + , –, =) (где 0 - константа, + - 2-местный функциональный символ, – - 1-местный функциональный символ).

Докажите, что в этой сигнатуре

а) $\mathbf{Z}$ не элементарно эквивалентно $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

б) $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ не элементарно эквивалентно $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

4. Докажите, что в сигнатуре, состоящей из конечного числа одноместных предикатов и равенства всякая теория имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных моделей.

5. Докажите, что в сигнатуре, состоящей из счетного числа одноместных предикатов и равенства, всякая всякая теория имеет не более континуума попарно неизоморфных счетных моделей.

6. Сколько существует попарно неизоморфных счетных структур в сигнатуре, состоящей из счетного числа одноместных предикатов и равенства ?

7. Докажите, что теория с одним 2-местным предикатом и аксиомами симметричности и иррефлексивности *(теория графов)* имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.

8. Докажите, что класс всех абелевых групп без кручения (в сигнатуре абелевых групп) *неэлементарен* (т. е. не является классом всех моделей некоторой формулы).

9. Пусть T – полная теория с равенством, имеющая конечную модель. Докажите, что T не имеет бесконечных моделей.

10. Докажите, что класс всех полей конечной характеристики не является классом всех моделей никакой теории (т. е. не является пересечением элементарных классов).

11. Аналогичная задача для класса всех циклических групп.

12. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} полна. Постройте какую-нибудь систему аксиом этой теории.

13. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} не является конечно аксиоматизируемой.

14. Докажите, что теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} разрешима.

15. Докажите, что теория всех конечных множеств в сигнатуре {=} эквивалентна исчислению предикатов в этой сигнатуре.

16. Докажите, что теория полей нулевой характеристики в сигнатуре колец не является конечно аксиоматизируемой.

17. Докажите, что теория упорядоченного множества рациональных чисел на отрезке [0,1] полна.

18. Докажите, что если теория первого порядка в конечной сигнатуре имеет конечное число полных расширений (в той же сигнатуре), которые все рекурсивно аксиоматизируемы, то эта теория разрешима.
19. Найдите все полные расширения теории плотных линейно упорядоченных множеств.
20. Докажите, что теория плотных линейно упорядоченных множеств разрешима.
21. Докажите, что если теория первого порядка в конечной сигнатуре не имеет бесконечных моделей, то она разрешима.
22. Группа называется периодической с периодом p (где p — простое число), если всякая ее нетривиальная циклическая подгруппа имеет порядок p. Докажите, что теория всех бесконечных абелевых групп периода p в сигнатуре (+,-,0) счетно категорична.
23. Докажите, что теория всех бесконечных абелевых групп периода p в сигнатуре (+,-,0). разрешима.
24. Докажите, что следующие функции и предикаты примитивно рекурсивны:

а) x делится на y,

б) НОД(x,y),

в) НОК(x,y),

г) [x/y],

д) [$\sqrt{x}$],

е) [$\log_2$ x],

ж) x — простое число,

з) x и y взаимно просты,

и) p_x (простое число с номером x).

25. Докажите, что если множество $A \subseteq \mathbf{N}^3$ перечислимо, то множество $B=\{x \mid \exists y\ \exists z\ (x,y,z) \in A\}$ перечислимо.
27. Докажите, что если множества $A,B \subseteq \mathbf{N}$ перечислимы, то множество $C=\{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$ перечислимо.
28. Докажите, что если множества $A,B \subseteq \mathbf{N}$ разрешимы, то множество $C=\{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$ разрешимо.
29. Докажите следующие теоремы в Q:

а) если сумма двух чисел равна 0, то они оба равны 0,

б) если произведение двух чисел не равно 0, то они оба не равны 0.

30. Докажите, что теория Q не имеет конечных моделей.
31. В сигнатуре арифметики определим $x \le y := \exists z\ (x+z=y)$

Докажите, что если $m \le n$, то $Q \vdash \bar{m} \le \bar{n}$.

32. Докажите в Q:

а) $\bar{m} \le \bar{n} \wedge \bar{n} \le \bar{m} \to \bar{m} = \bar{n}$

б) $\bar{m} \le \bar{n} \wedge \bar{n} \le \bar{p} \to \bar{m} \le \bar{p}$

в) $\bar{m} \le \bar{n} \vee \bar{n} \le \bar{m}$

г) $\forall x\ (x \le \bar{n} \vee \bar{n} \le x)$

33. Докажите, что исчисление предикатов в сигнатуре $\{=\}$ разрешимо.
34. Сколько имеется попарно неэквивалентных теорий в сигнатуре $\{=\}$?
35. Докажите, что элементарная теория кольца $\mathbf{Z}$ неразрешима.