Программы вступительного экзамена в аспирантуру (отделение математики)

ОБЩАЯ ЧАСТЬ:

1. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Непрерывность функции одной переменной. Свойства непрерывных функций. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

2. Непрерывность функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа. Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

3. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$. Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства.

4. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами: однородные и неоднородные.

5. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах. Теорема Вейерштрасса об аналитичности суммы ряда из аналитических функций. Аналитическая функция в целом. Римановы поверхности.

6. Определители. Свойства полилинейности и кососимметричности. Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей, определитель произведения квадратных матриц. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица (существование и единственность). Способы вычисления.
7. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Системы линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Теорема Крамера о системах линейных уравнений с квадратной матрицей.
8. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы, приведение к нормальному виду. Закон инерции квадратичных форм.
9. Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы, линейного оператора к жордановой форме.
10. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Матрица Грама системы векторов, связь с объемом.
11. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.
12. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп. Порядки элементов прямого произведения. Разложимость циклических групп в прямое произведение. Теорема о разложении конечно-порожденной абелевой группы в прямое произведение циклических подгрупп.
13. Деление многочленов от одной переменной с остатком. Корни многочлена и теорема Безу. Кратность корня, связь с производной. Разложение многочленов от одной переменной над полем на неприводимые множители. Теорема о симметрических многочленах.
14. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности, ее геометрический смысл.

Литература:

1. Александров П.С., Лекции по аналитической геометрии, М., Наука, 1968.
2. Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука 1971.
3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, М., Дрофа, 2004.
4. Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., Факториал Пресс, 2002.
5. Зорич В.А., Математический анализ. т.т. 1 и 2, М., МЦНМО, 2007.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., Физматлит, 2004.
7. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I - III, М., МАИК НАУКА, 2000.
8. Маркушевич А.И., Введение в теорию аналитических функций, М., Наука, т. 1, 1967, т. 2, 1968.
9. Михалев А.В., Михалев А.А., Начала алгебры, ч. 1, М., Интеренет-Ун-т Информ. Технологий, 2005.
10. Никольский С.М., Курс математического анализа, М., Физматлит, 2001
11. Новиков С.П., Фоменко А.Т., Элементы дифференциальной геометрии и топологии, М., Наука, 1987.
12. Петровский И.Г., Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1964.
13. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1982.
14. Рашевский П.К., Курс дифференциальной геометрии, М., Едиториал УРСС, 2003.
15. Шабат Б.В., Введение в комплексный анализ, т.т. 1, 2, М., Наука, 1987.

Дополнительные вопросы к программе вступительных экзаменов в аспирантуру по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. (Логика)

1. Язык логики высказываний. Булевы функции. Исчисление высказываний, его корректность и полнота.
2. Интуиционистская логика высказываний. Теорема Крипке о полноте.
3. Язык логики первого порядка. Интерпретации, модели. Теорема компактности, теорема Лёвенгейма — Скулема. Исчисление предикатов первого порядка, его корректность. Теорема о полноте. Нестандартные модели арифметики.
4. Теории первого порядка. Полные теории. Категоричные в данной мощности теории. Разрешимые теории. Категоричность в счётной мощности теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.
5. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиоматическая теория множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна. Континуум-гипотеза.
6. Общее понятие алгоритма. Вариант формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Пример перечислимого неразрешимого множества. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Теорема Раиса.
7. Первая теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Теорема Чёрча о неразрешимости логики предикатов.
8. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP, PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.

Литература

1. Н.К.Верещагин, А.Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2012.
2. Н.К.Верещагин, А.Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 2012.
3. М.Гэри, Д.Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
5. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
6. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
7. П.С.Новиков. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.