Определения. Рассматриваем ориентированные графы, которые состоят из компонент – цепей и циклов, в том числе петель; без изолированных вершин (=точек). Дугам (=рёбрам) приписаны имена – разные натуральные числа. Два графа *a* и *b* имеют *равный состав*, если у них множества имён совпадают; иначе – дуги, присутствующие лишь в *a* (или лишь в *b*), называются *a-особыми* (*b-особыми*), а все иные дуги называются *общими*.

Операции над графом (подробнее см. http://lpcs.math.msu.su/~lyubetsky/2018/): *двойная переклейка* – разрезать две вершины и по-новому отождествить (=склеить) четыре образовавшихся края; *полуторная переклейка* – разрезать вершину и по-новому склеить один образовавшийся край с каким-то свободным краем в графе; *одинарные переклейки* (*разрез* и *склейка*) – разрезать вершину или склеить два свободных края. Операции обратимы. Для *неравного состава* добавляются операции: *удалить* из графа связный отрезок из *a*-особых дуг и *вставить* в граф связный отрезок из *b*-особых дуг («отрезки»); если у удаляемого отрезка были соседние дуги, то их края склеиваются. Первые четыре операции называются *стандартными*, последние две – *дополнительными*.

Общий граф a+b графов *a* и *b* с равным составом – неориентированный граф без петель, вершины которого – имена краёв всех дуг; например, начало дуги с номером 3 имеет имя 3_1, конец – имя 3_2. Ребро общего графа соединяет две вершины, если соответствующие им края склеены в *a* или в *b*; оно помечается как *a*- или *b*-ребро (*обычное* ребро в *a+b*). В случае неравного состава *a+b* имеет следующие вершины: *обычные* – номера краёв общих дуг; и *особые* – максимальные по включению отрезки, называемые *блоками*. Блок помечается как *a*- или *b*-вершина в *a+b* и ей приписывается последовательность дуг, составляющих блок. *Особое* ребро в *a+b* соединяет обычную вершину с особой, если в *a* или *b* край, соответствующий обычной вершине, склеен с краем блока, соответствующего особой вершине (*a*- или *b*-ребро). *Петля* в *a+b* соответствует циклу, который является блоком. *Висячим* называется особое ребро, инцидентное особой вершине степени 1.

<u>Задача критическая.</u> Долгим рисованием понять, что сказано выше.

<u>Задача простейшая.</u> Доказать: граф *a+b* состоит из циклов, петель и цепей (точки считаем цепями), а если в *a* и *b* нет цепей, то только из циклов и петель. Как выглядит *a+b*, если *a=b*?

<u>Задача простая.</u> Определить над *a+b* аналоги операций над графами *a* и *b*, кроме вставки и операций, разбивающих блок на части, так, чтобы для любой такой операции *o* над *a* и её аналога *o** выполнялось *o**(*a+b*)=*o*(*a*)+*b*. Почему трудно определить аналог операции вставки?

<u>Задача простая.</u> Рассмотрим задачу преобразования: найти кратчайшую по числу операций цепочку операций (*минимальная*), преобразующую данные граф *a* в *b*. Для равного состава свести её к задаче приведения: привести *a+b* к *финальному* виду (= виду *c+c*) кратчайшей цепочкой операций (*минимальная*). Отсюда получить линейный по времени алгоритм решения задачи преобразования для равного состава. Какие трудности встретятся при обобщении этого алгоритма на неравный состав? Как можно их преодолеть?

<u>Задача средней трудности.</u> Пусть *a* и *b* с равным составом и оба графа из одной циклической компоненты; разрешена лишь операция двойной переклейки. Доказать: существует минимальная цепочка, преобразующая *a* в *b*, и такая, что в ней любой промежуточный граф состоит не более чем из двух циклических компонент; если при некоторой операции в цепочке графов возникает вторая компонента, то следующая операция оставляет лишь одну компоненту. Отсюда получить алгоритм, строящий описанную минимальную цепочку и работающий не более, чем квадратичное время.

<u>Задача повышенной трудности.</u> Пусть *a* и *b* с равным составом и оба графа из одной линейной компоненты. Доказать: существует минимальная цепочка, преобразующая *a* в *b*, и такая, что в ней любой промежуточный граф содержит не более одной линейной компоненты; если при некоторой операции в цепочке графов возникает циклическая компонента, то следующая операция оставляет одну линейную. Отсюда получить алгоритм, строящий описанную минимальную цепочку и работающий не более, чем квадратичное время. Показать: в условиях задачи не всегда удаётся преобразовать *a* в *b* минимальной цепочкой так, чтобы и все промежуточные графы имели лишь линейные компоненты.

Задача повышенной трудности. Пусть a и b с равным составом и оба графа содержат лишь линейные компоненты. Доказать: существует минимальная цепочка, преобразующая a в b, такая, что в ней любой промежуточный граф содержит не более одной циклической компоненты; если при некоторой операции в цепочке графов возникает циклическая компонента, то следующая операция оставляет только линейные. Отсюда получить алгоритм, строящий описанную минимальную цепочку и работающий не более, чем квадратичное время.

Задача нерешённая. Усилить результаты трёх последних задач, в частности, обобщить их на неравный состав.

Задача средней трудности. *Размером* компоненты общего графа назовём сумму в ней числа обычных рёбер с половиной числа особых невисячих рёбер. Для обычных точек и петель размер считаем равным 0, для особых точек – равным "минус 1". *Размером общего графа* назовём сумму размеров его компонент. Доказать, что размер компоненты – целое число. Установить, как меняет размер графа каждая из пяти допустимых операций. Для какой из операций изменение размера графа зависит от её аргумента? В каком случае?

Задача средней трудности. План алгоритма автономного приведения общего графа к финальному виду следующий. Из компонент (кроме циклов длины 2 или 3) «вырезаются» обычные рёбра и замыкаются в циклы длины 2 (двойной или полуторной переклейкой или склейкой). Затем цепи (имеющие не менее двух обычных вершин) замыкаются в циклы (склейкой или полуторной переклейкой), циклы разбиваются на циклы размера 2 (двойной переклейкой). В конце удаляются особые вершины и петли. Уточнить этот план и описать алгоритм подробно. Показать, что в случае равного состава алгоритм строит минимальную цепочку (т.е. *точен*).

Задача повышенной трудности. Выразить число операций в алгоритме автономного приведения через характеристики исходного графа $a+b$. Обозначим полученное выражение через $T(a+b)$. Доказать, что если для любой операции o, применённой к произвольному общему графу G, выполнено «неравенство треугольника» $1 \geq T(G)-T(o(G))$, где $o(G)$ – результат применения o к G, то алгоритм точен. Пусть в a и b нет цепей (*циклический случай*). Проверить неравенство треугольника для различных операций, доказывая, таким образом, точность алгоритма автономного приведения для циклического случая.

Определение. Пусть каждой операции приписана цена – положительное рациональное число. Цепочку с минимальной суммарной ценой операций, преобразующую a в b или приводящую $a+b$ к финальному виду, назовём *кратчайшей*. *Автономной ценой* $C(G)$ общего графа G назовём суммарную цену указанной в автономном приведении цепочки операций. *Взаимодействием* в G назовём фиксированную цепочку S операций, последовательно применяемых к G. *Качеством* $P(S)$ *взаимодействия* S назовём величину $P(S)=C(G)-C(S(G))-c(S)$, где $S(G)$ – граф, полученный после применения цепочки S к G, $c(S)$ – суммарная цена операций в S. Число $P(S)$ показывает, какая цена экономится в результате применения S по сравнению с автономным приведением графа G, т.е. без использования взаимодействия S.

Задача критическая. На собственных рисунках понять определение.

Задачи простые. В следующих задачах привести общий граф к финальному виду операциями двойной переклейки и удаления особой вершины при условиях на цены:
1) Цены операций равны 1 (бесценовой вариант);
2) Цена двойной переклейки равна 1, цена удаления равна 0.5 (стационарный малый вариант);
3) Цена двойной переклейки 1, цена удаления 1.5 (стационарный средний вариант);
4) Цена двойной переклейки 1, цена удаления 2.5 (стационарный большой вариант);
5) Цены двойной переклейки и удаления a-вершины 1, цена удаления b-вершины равна 1.5 (нестационарный вариант).

Граф задан ниже последовательностью *a*- и *b*-рёбер в каждой компоненте и состоит только из циклов и петель (циклический случай).

1. цикл (*abab*).
2. цикл (*aabab*).
3. цикл (*aabbab*).
4. цикл (*aabbaab*).
5. цикл (*aabbaabb*).

Примечание. Последняя задача для третьего и четвёртого варианта цен более сложная.

6. цикл (*abb*) и *b*-петля.
7. два цикла (*baa*).
8. циклы (*abb*) и (*aabb*).
9. два цикла (*aabb*).
10. цикл (*aabbaabbaabb*).

В следующих задачах привести общий граф к финальному виду четырьмя стандартными операциями и операцией удаления особой вершины при следующих условиях на цены:

1) Цены всех операций равны 1 (бесценовой вариант).

2) Цены стандартных операций равны 1, цена удаления равна 0.5 (стационарный малый вариант).

А также указать взаимодействия (если есть) и их качества. Висячие рёбра в цепях указаны подчёркиванием.

1. цепь [$abbaa$].
2. цепь [$\underline{a}bb\underline{a}$].
3. цепь [$bbaa\underline{b}$].
4. цепь [$\underline{b}aabb\underline{a}$].
5. цепи [$aa\underline{b}$] и [$bb\underline{a}$].
6. цепь [$bbaabb$] и особая *b*-точка.
7. цепи [$\underline{b}aa$] и [$\underline{a}bb\underline{a}$].
8. цепи [$bb\underline{a}$] и [aa].
9. цепи [$\underline{ab}$] и [$aabb$].
10. цепи [$\underline{ab}$] и [$bb\underline{a}$].
11. две цепи [$aa\underline{b}$].
12. цепи [$aa\underline{b}$], [$aabb$] и особая *a*-точка.
13. две цепи [$aa\underline{b}$] и особая *a*-точка.

Задача средней трудности. Обобщить на случай произвольных цен операций неравенство треугольника. Доказать, что из справедливости этого неравенства следует точность алгоритма. Верно ли обратное утверждение?

Определение. Классификация компонент общего графа. Цепь нечётного (чётного) размера назовём *нечётной* (соответственно, *чётной*); нуль считаем чётным числом, а –1 – нечётное число. Введём понятие *типа* цепи: если в ней нет обычных рёбер, то $1a$ – нечётная цепь с одним висячим *b*-ребром; $2a$ – нечётная цепь с двумя висячими *b*-рёбрами или особая *b*-точка – в первом случае говорим о типе $2a^*$, во втором – о типе $2a'$; $3a$ – нечётная цепь без висячих рёбер с двумя крайними *a*-рёбрами (тип $3a^*$) или одинарное *a*-ребро (тип $3a'$); 1_a – чётная цепь с одним висячим *a*-ребром размера больше 0 (тип 1^*_a) или размера 0 (тип $1'_a$), 2 – чётная цепь с двумя висячими рёбрами размера больше 0 (тип 2^*) или размера 0 (тип $2'$), 3 – чётная цепь без висячих рёбер размера больше 0. Аналогично определяются типы с заменой *a* на *b*. Тип 1 – объединение типов 1_a и 1_b, тип 0 – цепь без особых вершин. Если в цепи имеются обычные рёбра, то *тип цепи* равен типу цепи, которая получается после вырезания этих рёбер. Циклы делим на (*a*,*b*)-циклы, *a*-циклы, *b*-циклы и 0-циклы в зависимости от наличия в них особых вершин обоих типов, только одного или их отсутствия. Такие же обозначения применяем ко всем компонентам графа.

Задача критическая. Нарисовать примеры компонент указанных типов.

Задача простая. Показать, что тип цепи не зависит от порядка, в котором вырезаются обычные рёбра.

Задача средней трудности. Пусть цена всех стандартных операций равна 1, цена удаления вершины равна некоторому w>0 (назовём такое соотношение цен *стационарным*). Выразить суммарную цену операций в алгоритме автономного приведения через характеристики исходного графа $a+b$.

Задача повышенной трудности. При стационарном соотношении цен перебрать пары типов компонент и выяснить, между какими парами возможно взаимодействие, качество которого выражается ненулевой линейной возрастающей функцией от w (будем называть такое взаимодействие *линейно-положительным*). Между какими парами цепей возможно взаимодействие нулевого (не зависящего от w) качества? Чем может быть полезно такое взаимодействие?

Задача средней трудности. Указать линейно-положительное взаимодействие, применяемое к одному циклу.

Задача повышенной трудности. Указать линейно-положительные взаимодействия между тремя цепями, четырьмя цепями и между циклом и двумя цепями. Эти взаимодействия являются композицией двух или трёх «попарных» линейно положительных взаимодействий, указать их. Какие могут быть причины рассматривать такие «составные» взаимодействия?

Задача сложная. Пусть цена всех стандартных операций равна 1, цена удаления a-вершины равна некоторому w_a>0, цена удаления b-вершины – некоторому w_b>0 (назовём такое соотношение цен *нестационарным*). Уточнить алгоритм автономного приведения для нестационарного соотношения цен. Выразить суммарную цену операций в этом алгоритме через характеристики исходного графа $a+b$. Получить выражения для качеств взаимодействий, рассмотренных в предыдущих трёх задачах.

Задачи средней трудности. В следующих 8 задачах требуется привести общий граф к финальному виду кратчайшей цепочкой, исследовать различные случаи стационарного и нестационарного соотношения цен, указать использованные взаимодействия и их качества. Граф состоит из следующих цепей (для примера взять конкретные цепи этих типов):

1) цепи типов 1a, 1a, 1b, 2, и 3;
2) цепи типов 1a, 1b, 2a, 2b, 2, 3, 1_b;
3) цепи типов 1b, 1b, 2a, 2b, 2, 3, 1_a;
4) цепи типов 1a, 1a, 2a, 3b, 1_a, 1_b;
5) цепи типов 2a, 2a, 2b, 3, 3, 3, 3;
6) цепи типов 3b, 3b, 1_b, 1_b;
7) цепи типов 2b, 3a, 3a, 3b, 2, 1_a, 1_b, 1_b;
8) цепи типов 1a, 1a, 1a, 2b, 3b, 3b, 2.