Определения. Везде речь о множествах на прямой (=подмножествах множества вещественных чисел R, но полезно рассмотреть их и в n-мерном пространстве R^n). Два множества X и Y *одинаковой* мощности, если они биективны. Если не так и X биективно с частью Y, то X *меньшей* мощности, чем Y. Таким образом, задан линейный порядок на классе всех множеств (почему?). Функция множества $f(X)$ называется *конечно-/счётно-аддитивной*, если $f(\coprod_i X_i)=\sum_i f(X_i)$, $\coprod_i$ означает объединение попарно непересекающихся множеств («*дизъюнктное объединение*»), а i пробегает конечное множество / счётное множество. *Борелевским* называется множество из σ-кольца множеств, которое включает все открытые и замкнутые множества. *Борелевской* называется функция, у которой прообраз всякого борелевского множества – борелевское множество. *Совершенным* называется замкнутое множество без изолированных точек; *изолированная* в множестве точка имеет окрестность без точек множества. *Нигде не плотное* множество таково, что любом интервале содержится подинтервал без точек множества. (Это то же самое, как множество не содержит ни одного интервала?)

Элементарные задачи.
1. Существует последовательность множеств, каждое меньшей мощности, чем отрезок [0,1] вещественных чисел, которая в объединение даёт весь отрезок? [Задача интересна тем, что имеет наглядное, геометрическое решение.]
2. Существует счётно-аддитивная функция, определённая на всех подмножествах отрезка, со значениями в отрезке, равная 1 на всём отрезке? Существует ли такая же функция с дополнительным свойством: значение функции не меняется при любом сдвиге?
<Трудная задача. Существует ли функция с последним свойством, но конечно-аддитивная в R^1, в R^2, в R^3?>
3. Интервал (0,1) является объединением счётной последовательности попарно непересекающихся замкнутых множеств?
4. Существует функция, определённая на отрезке, непрерывная в каждой рациональной точке и разрывная в каждой ирруциональной?
5. Любое измеримое множество положительной меры содержит точки, расстояние между которыми рационально?
6. Построить непустое нигде не плотное совершенное множество в отрезке. Построить такое множество меры Лебега нуль.
7. Непустое совершенное множество биективно с отрезком.
8. Пусть функция равна 0 на кантором множестве и равна n на дополнительных к этому множеству интервалах с длиной 3^{-n}. Её интеграл по отрезку равен 3.

Задачи.
1. Легкая.
На множестве 2^N всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 определим отношение эквивалентности: две последовательности эквивалентны, если $x(n)=y(n)$ для всех n кроме конечного числа («почти везде»). Построить борелевский автоморфизм 2^N, орбитами которого являются классы эквивалентности этого отношения.

2. Сложная.
На множестве R всех вещественных чисел определим отношение эквивалентности: числа эквивалентны, если их разность рациональна. Построить борелевский автоморфизм, орбитами которого являются такие классы эквивалентности этого отношения.

3. Лёгкая (a) и более сложная (b).
Пусть X – совершенное множество вещественных чисел. Доказать: (a) для любой непрерывной функции f: $X\to R$ существует совершенное подмножество $Y \leq X$, на котором f – константа или биекция.

(b) для любой борелевской функции f: $X \to R$ существует совершенное подмножество $Y \leq X$, на котором f непрерывна. Вывести отсюда результат задачи пункта (a) для борелевских функций f.

4. Сложная

Построить множество в плоскости R^2, которое пересекает каждую прямую (вертикальную, горизонтальную, наклонную) ровно в двух точках. Использовать аксиому выбора.

5. Сложная

Пусть X и Y – совершенные множества в $R(x,y)$. Декартово произведение $P = X$ x Y называется совершенным прямоугольником. Пусть на нём задана непрерывная функция f: $P \to R$. Доказать: существует совершенный прямоугольник P', подмножество P, на котором выполняется одна из следующих возможностей для f: константа, равна функции x, равна функции y, биективна.