Московский государственный университет
Механико-математический факультет

“Введение в математическую логику”
1-й курс, 2-й семестр
Вопросы к экзамену

1. Формулы логики высказываний, понятие подформулы. Истинностные значение формулы при данной оценке пропозициональных переменных. Таблица истинности формулы. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Алгоритм распознавания выполнимости.

2. Связь между формулами логики высказываний от n переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.

3. Семантическое следование в логике высказываний. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Важнейшие равносильности. Операции подстановки и замены подформулы на равносильную.

4. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.

5. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Понятие вывода и выводимой формулы; вывод формулы $A \to A$. Корректность исчисления высказываний.

6. Выводимость из гипотез в исчислении высказываний, её простейшие свойства. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

7. Некоторые выводимые правила в исчислении высказываний: правило силлогизма, контрапозиции и ex falso.

8. Непротиворечивые множества формул в исчислении высказываний. Максимальные непротиворечивые множества формул. Теорема Линденбаума.

9. Теорема о полноте исчисления высказываний. Свойство сильной полноты исчисления высказываний. Свойство компактности.

10. Понятие сигнатуры и модели (алгебраической системы) данной сигнатуры. Примеры моделей: стандартная модель арифметики; кольцо целых

чисел; кольца многочленов и матриц порядка n над данным полем; элементарная геометрия плоскости; модель Пуанкаре геометрии Лобачевского; примеры частично упорядоченных и линейно упорядоченных множеств.

11. Язык первого порядка данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные, термы, формулы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.

12. Семантика логики первого порядка. Расширение сигнатуры данной модели константами. Значение замкнутого терма расширенной сигнатуры в данной модели. Истинностное значение замкнутой формулы расширенной сигнатуры в данной модели.

13. Предикаты и функции, выразимые в данной модели. Выразимость предиката параллельности прямых $ab\|cd$ в языке элементарной геометрии и формулировка аксиомы о параллельных.

14. Гомоморфизмы и изоморфизмы моделей. Теорема о сохранении истинностного значения формулы при изоморфизме. Автоморфизмы моделей, метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов. Описание автоморфизмов моделей $(\mathbb{Z}; \leq)$, $(\mathbb{R}^2; =, B)$ и $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ и примеры невыразимых предикатов в этих моделях.

15. Выполнимые формулы и множества формул языка первого порядка. Общезначимые и тождественно ложные формулы, их связь с выполнимыми формулами; примеры. Семантическое следование в логике первого порядка, его связь с понятиями выполнимости и общезначимости.

16. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Теоремы о подстановке и о замене подформулы на равносильную. Приведение формулы языка первого порядка к предварённой форме.

17. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Модель данной теории. Понятие выполнимой теории. Примеры теорий: теория строгих частичных порядков, теория отношения эквивалентности, теория простых графов.

18. Теории первого порядка с равенством. Нормальные модели. Теорема о существовании нормальной модели у выполнимой теории с равенством. Примеры теорий с равенством: теория групп, формальная арифметика.

19. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Теорема о тавтологии. Выводимость в теории, простейшие свойства выводимости. Доказуемые, опровержимые, независимые формулы для данной теории.

20. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

21. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

22. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства), её три эквивалентные формулировки (с доказательством эквивалентности). Теорема Мальцева о компактности для логики предикатов.

23. Нестандартные модели арифметики, их существование. Понятие галактики. Описание отношение порядка на элементах данной галактики. Плотность порядка на множестве галактик.

24. Элементарная теория данной модели. Подмодель, элементарная подмодель данной модели. Теорема Лёвенгейма–Сколема (для счётной сигнатуры). Существование счётных моделей теории множеств ZFC, элементарных теорий полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и элементарной геометрии Тарского.

25. Понятие полной теории. Эффективно аксиоматизируемые и разрешимые теории. Теорема о разрешимости полной эффективно аксиоматизируемой теории. Примеры полных эффективно аксиоматизируемых теорий: элементарная геометрия, теория алгебраически замкнутых полей нулевой характеристики, теория упорядоченного поля действительных чисел (без доказательств).

26. Интерпретируемость одной модели в другой. Перевод формулы при данной интерпретации. Взаимная интерпретируемость моделей $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ и $(\mathbb{R}; =, 0, 1, +, \cdot)$. Теорема о переносе свойства разрешимости элементарной теории с интерпретирующей модели на интерпретируемую.

27. Основные понятия теории алгоритмов. Пошаговый характер выполнения алгоритма. Частичная функция, вычисляемая данным алгоритмом; область определения и область значений вычислимой функции.

28. Машина Тьюринга. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча–Тьюринга.

29. Разрешимые множества. Свойства объединения, пересечения, дополнения разрешимых множеств.

30. Перечислимые множества. Теорема об эквивалентных определениях перечислимого множества.

31. Свойства пересечения и объединения перечислимых множеств. Теорема о графике вычислимой функции. Теорема Чёрча–Поста (критерий разрешимости).

32. Кодирование машин Тьюринга. Построение универсальной машины Тьюринга.

33. Универсальные функции. Построение универсальной вычислимой функции для класса всех одноместных вычислимых функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

34. Пример вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения. Пример неразрешимого перечислимого множества. Алгоритмическая неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга.

35. Существование неотделимой пары перечислимых множеств.

36. Главные универсальные функции. Главность вычислимой универсальной функции, построенной по нумерации машин Тьюринга.

37. Задача распознавания свойств вычислимых функций по их программам. Теорема Райса.

38. Метод элиминации кванторов. Полнота и разрешимость теории плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элемента.

39. Формальная арифметика Пеано (в языке, обогащённом функцией 2^x), стандартная модель арифметики. Ограниченные формулы, Σ_1-формулы, Π_1-формулы. Σ_1-определимость в стандартной модели арифметики.

40. Обогащение стандартной модели арифметики с помощью Δ_0-определений. Кодирование слов и последовательностей слов данного конечного алфавита натуральными числами. Δ_0-определимость функций конкатенации слов и последовательностей слов.

41. Эквивалентность понятий перечислимого и Σ_1-определимого множества в стандартной модели арифметики. Доказательство перечислимости каждого Σ_1-определимого множества. Σ_1-определимость каждого перечислимого множества (схема доказательства).

42. Неперечислимость множества истинных арифметических предложений. Первая теорема Гёделя о неполноте.

43. Σ_1-полнота арифметики Пеано и арифметики Робинсона Q (без детального доказательства). Неразрешимость арифметики Пеано, неразрешимость исчисления предикатов в арифметическом языке.

44. Теорема Гёделя–Россера.