Теорема Гёделя–Россера

Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.

Л.Д. Беклемишев

1 Теорема Гёделя–Россера

Теорема 1.1. *Пусть T — теория в языке, содержащем арифметический, удовлетворяющая следующим условиям:*

- *T эффективно аксиоматизируема;*
- *T содержит арифметику Робинсона Q;*
- *T непротиворечива.*

Тогда найдётся арифметическое предложение A такое, что $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

Доказательству этой теоремы предпошлём следующую лемму.

Лемма 1.2. *Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$ перечислимы и $A \cap B = \varnothing$. Тогда найдётся Σ_1-формула $\varphi(a)$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$*

- *$n \in A \Rightarrow Q \vdash \varphi(\overline{n})$,*
- *$n \in B \Rightarrow Q \vdash \neg\varphi(\overline{n})$.*

Доказательство. По теореме о Σ_1-определимости перечислимых множеств найдутся Δ_0-формулы A_0 и B_0 такие, что

$$\begin{aligned} n \in A &\iff \mathbb{N} \vDash \exists x\, A_0(\overline{n}, x), \\ n \in B &\iff \mathbb{N} \vDash \exists y\, B_0(\overline{n}, y). \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(a) \overset{\text{def}}{\iff} \exists x\, (A_0(a, x) \wedge \forall y < x\, \neg B_0(a, y)).$$

Неформально, $\varphi(a)$ утверждает, что работа алгоритма, принимающего множество A, на входе a заканчивается раньше работы алгоритма, принимающего B («Россеровское сравнение свидетелей»).

Если $n \in A$, то для некоторого m истинна формула

$$A_0(\overline{n}, \overline{m}) \wedge \forall y < \overline{m}\, \neg B_0(\overline{n}, y)).$$

По теореме о Σ_1-полноте арифметики Q получаем, что эта формула доказуема в Q, откуда $Q \vdash \varphi(\overline{n})$.

Если $n \in B$, то для некоторого m истинна формула

$$B_0(\overline{n}, \overline{m}) \wedge \forall y \leq \overline{m}\, \neg A_0(\overline{n}, y)). \tag{$*$}$$

По теореме о Σ_1-полноте арифметики Q получаем, что эта формула доказуема в Q. Отсюда следует, что $Q \vdash \neg\varphi(\overline{n})$. Поясним этот вывод следующим рассуждением, которое легко преобразовать в формальный вывод в Q:

Допустим $\varphi(\overline{n})$. Тогда для некоторого x

$$A_0(\overline{n}, x) \wedge \forall y < x\, \neg B_0(\overline{n}, y)).$$

Если $x \leq \overline{m}$, то имеем $\neg A_0(\overline{n}, x)$ из $(*)$, что противоречит $A_0(\overline{n}, x)$. Если же $\overline{m} < x$, то имеем $\neg B_0(\overline{n}, \overline{m})$, что противоречит $B_0(\overline{n}, \overline{m})$ из $(*)$. Осталось заметить, что в Q доказуемо

$$\forall x\, (x < \overline{m} \vee \overline{m} \leq x),$$

откуда следует требуемое противоречие. $\boxtimes$

Доказательство теоремы Гёделя–Россера. Пусть A, B — неотделимая пара перечислимых подмножеств $\mathbb{N}$. Воспользуемся леммой и рассмотрим соответствующую формулу φ. Для данной теории T рассмотрим множества

$$\begin{aligned} A' &\rightleftharpoons \{n \in \mathbb{N} : T \vdash \varphi(\overline{n})\}, \\ B' &\rightleftharpoons \{n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\varphi(\overline{n})\}. \end{aligned}$$

Поскольку T эффективно аксиоматизируема, оба эти множества перечислимы. Так как T непротиворечива, $A' \cap B' = \varnothing$. По лемме мы также имеем $A \subset A'$ и $B \subset B'$. Докажем, что найдётся $n \notin A' \cup B'$. Действительно, в противном случае A' и B' разбивают $\mathbb{N}$ (взаимно дополнительны) и по теореме Чёрча–Поста должны быть разрешимыми. Но это невозможно, так как в этом случае они отделяли бы A от B.

Если $n \notin A' \cup B'$, то очевидно $T \nvdash \varphi(\overline{n})$ и $T \nvdash \neg\varphi(\overline{n})$, то есть T неполна. Заметим, что построенное нами независимое утверждение принадлежит классу Σ_1 (а его отрицание классу Π_1). $\boxtimes$

Теорема 1.3. *Пусть теория T удовлетворяет условиям теоремы Гёделя–Россера. Тогда множество доказуемых и множество опровержимых в T предложений неотделимы.*

Доказательство. Обозначим

$$\begin{array}{rcl} P_T & \rightleftharpoons & \{\varphi : T \vdash \varphi\}, \\ R_T & \rightleftharpoons & \{\varphi : T \vdash \neg\varphi\}. \end{array}$$

В силу непротиворечивости T эти множества не пересекаются. Допустим, что некоторое разрешимое множество C отделяет P_T от R_T, то есть $P_T \subseteq C$ и $C \cap R_T = \varnothing$.

Как и в теореме Гёделя–Россера, рассмотрим неотделимую пару перечислимых множеств A, B, воспользуемся леммой и рассмотрим соответствующую формулу φ. Если $n \in A$, то $T \vdash \varphi(\overline{n})$, то есть $\varphi(\overline{n}) \in P_T$ и $\varphi(\overline{n}) \in C$. Если же $n \in B$, то $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$, то есть $\varphi(\overline{n}) \in R_T$ и $\varphi(\overline{n}) \notin C$. Значит, множество $\{n \in \mathbb{N} : \varphi(\overline{n}) \in C\}$ отделяет A от B. Это множество разрешимо, поскольку по n эффективно восстанавливается формула $\varphi(\overline{n})$ (для фиксированной φ). $\boxtimes$

Следствие 1.4. *Всякая теория T, удовлетворяющая условиям теоремы Гёделя–Россера, неразрешима.*

Следствие 1.5. *Неразрешимы следующие теории: Q, PA, ZFC.*

Следствие 1.6. *Чистое исчисление предикатов (пустая теория) в арифметическом языке неразрешимо.*

Доказательство. Для любого арифметического предложения A, по теореме о дедукции, $Q \vdash A \iff \vdash \bigwedge Q \to A$. Таким образом, для проверки выводимости A в Q было бы достаточно проверить выводимость формулы $\bigwedge Q \to A$ в чистом исчислении предикатов. $\boxtimes$