Вычислимость
лекция 12

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2008

lbekl@yandex.ru

24.04.2008

Главные универсальные функции

Опр.

Вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ называется *главной*, если для любой вычислимой $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ найдётся тотальная вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall e, x \; g(e, x) \simeq F(s(e), x).$$

Теорема.

Вычислимая универсальная функция $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$*, построенная по универсальной машине Тьюринга* U*, является главной.*

Замечание.
Вычислимую функцию $g(e, x)$ можно понимать как (возможно, не универсальный) язык программирования, где e — программа вычисления функции $x \mapsto g(e, x)$.

Функция s есть *интерпретатор*, сопоставляющий программе e языка g машину Тьюринга $s(e)$, вычисляющую ту же функцию.

Доказательство.

Пусть $\Delta = \{1\}$ и МТ M вычисляет $g(e, x)$ в унарной записи, то есть $M_\Delta(\overline{\langle e, x\rangle}) \simeq \overline{g(e, x)}$.

Сопоставим МТ M машину $M[n]$, которая для данного входа $\overline{x}$ вычисляет $\overline{\langle n, x\rangle}$, а далее работает как M. Преобразование $n \mapsto Code(M[n])$ является тотальной вычислимой функцией.

Имеем

$$M_\Delta(\overline{\langle e, x\rangle}) \simeq M[e]_\Delta(\overline{x}) \simeq U_\Delta(Code(M[e])\$\overline{x}).$$

Вспомним, что $F(i,n) \rightleftharpoons |U_\Delta(\mathrm{word}_\Pi(i)\$\overline{n})|$.

Отсюда $g(e,x) \simeq F(s(e),x)$, где

$$s(e) = \mathrm{word}_\Pi^{-1}(Code(M[e])).$$

Теорема Райса

Какие свойства вычислимых функций распознаваемы по программе?

Примеры практически интересных свойств частичных функций f:

- $\forall x \; !f(x)$ (тотальность);
- $f(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 фиксированы;
- $f = g_0$, где функция g_0 фиксирована;
- «вычисление $f(x)$ на некотором x приводит к стиранию всех данных на HD компьютера».

Опр.

Пусть фиксирована универсальная вычислимая функция F. Обозначим через φ_e частичную функцию с индексом e, т.е. $\varphi_e(x) \simeq F(e, x)$.

Опр.

Нетривиальным свойством вычислимых функций называем любое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ такое, что $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \mathrm{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

С каждым свойством $\mathcal{C}$ вычислимых функций связывается множество всех программ, вычисляющих функции со свойством $\mathcal{C}$, то есть множество $I_{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$.

Теорема.

Если $\mathcal{C}$ — нетривиальное свойство вычислимых функций, то множество $\{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$ неразрешимо.

Доказательство.

- Можно считать, что нигде не определённая функция ζ не обладает свойством $\mathcal{C}$ — иначе заменим $\mathcal{C}$ на его дополнение.
- Т.к. $\mathcal{C} \neq \varnothing$, фиксируем вычислимую функцию $g_0 \in \mathcal{C}$.

- Построим тотальную вычислимую функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такую, что для всех $x \in \mathbb{N}$

$$x \in K \iff f(x) \in I_{\mathcal{C}}.$$

- Если бы $I_{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in \mathcal{C}\}$ было разрешимо, то мы получили бы следующий разрешающий алгоритм для K: *для данного* x *вычислить* $y = f(x)$ *и проверить* $y \in I_{\mathcal{C}}$.

Вычисляем $g(e,x)$ в соответствии со следующим алгоритмом:

- вычислить $\varphi_e(e)$;
- если $!\varphi_e(e)$, очистить ленту, а затем вычислить $g_0(x)$.

По свойству главности получаем тотальную вычислимую функцию f такую, что

$$\forall e, x\ \varphi_{f(e)}(x) \simeq g(e, x).$$

Тогда имеем:

- Если $e \in K$, то $\varphi_{f(e)}(x) \simeq g_0(x)$;
- Если $e \notin K$, то $\varphi_{f(e)} = \zeta$.

Отсюда $e \in K \iff \varphi_{f(e)} \in \mathcal{C} \iff f(e) \in I_{\mathcal{C}}$.

Следствие.

Следующие свойства вычислимых функций не распознаваемы по программе:

- тотальность,
- ограниченность,
- конечность области определения, и т.д.

Замечание.

Такие свойства как

- «вычисление $f(0)$ завершается менее, чем за 100 шагов»;
- «программа f содержит менее 100 символов» (при фиксированном алфавите)

являются разрешимыми свойствами программ. Они не соответствуют никакому классу частичных *функций*.