Логика высказываний
лекция 2

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2008

lbekl@yandex.ru

14.02.2008

Объявление

Просеминар по математической логике и информатике

http://proseminar.math.ru/

Пятница, 16:45–18:20, ауд. 16–22
Начало 15 февраля.

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$.
- Формулы Fm строятся по правилам:
  1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
  2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
- Формулы Fm строятся по правилам:

1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ — формулы.

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$.
- Формулы Fm строятся по правилам:
  1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
  2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Семантика логики высказываний

Опр.

Истинностные значения: $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{Л}, \text{И}\} \rightleftharpoons \{0, 1\}$.
Булевы функции: функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Опр.

Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Семантика логики высказываний

Опр.

Истинностные значения: $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{Л}, \text{И}\} \rightleftharpoons \{0, 1\}$.
Булевы функции: функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Опр.

Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Любая оценка продолжается естественым образом до отображения $f : \mathrm{Fm} \to \mathbb{B}$.

Опр.

$f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f. Вычисляется по истинностным таблицам.

Формально, $f(A)$ определяется индукцией по построению A:

$$
\begin{aligned}
f(\neg A) = \text{И} &\iff f(A) = \text{Л};\\
f(A \wedge B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{И} \text{ и } f(B) = \text{И};\\
f(A \vee B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{И} \text{ или } f(B) = \text{И};\\
f(A \to B) = \text{И} &\iff f(A) = \text{Л} \text{ или } f(B) = \text{И}.
\end{aligned}
$$

Утверждение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$.
Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между оценками $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ и наборами $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$,
где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}},$$

где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$,
где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

Таблицы истинности

Опр.

Таблица истинности формулы A над n переменными есть булева функция $\varphi_A : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ такая, что

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A),$$

для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.

Функциональная полнота

Теорема.

Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ найдётся такая формула A от n переменных, что $\varphi = \varphi_A$. При этом можно считать, что A содержит лишь связки $\neg$ и $\vee$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И};\\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И}; \\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И}; \\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = \text{И} \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = \text{И}$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \iff \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = И \iff f = f_{\vec{x}}. \qquad (1)$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = И$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = И \iff \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j. \qquad (2)$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = И \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \;\, f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \;\, \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. ☒

Тогда

$$
\begin{aligned}
f_{\vec{x}}(A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = \text{И} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \text{И} \quad \text{по } (2).
\end{aligned}
$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = И \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j\ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j\ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по } (2). \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = И \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по } (2). \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Выполнимые формулы

Опр.

Формула A *выполнима*, если $\exists f: \; f(A) = \text{И}$.

Опр.

Множество формул Γ *выполнимо*, если
$\exists f \; \forall A \in \Gamma \; f(A) = \text{И}$.

Такая оценка f называется *выполняющей* для Γ.

Тавтологии

Опр.

Формула A — *тавтология*, если $\forall f \ f(A) = \text{И}$.

Опр.

Формула A — *тождественно ложна*, если $\forall f \ f(A) = \text{Л}$.

Предложение.

Следующие условия равносильны.

1. *Формула A тождественно ложна.*
2. *Формула A не выполнима.*
3. *Формула $\neg A$ — тавтология.*

Пример.

$\neg(P \to P)$ тождественно ложна (и не выполнима); $P \to P$ тавтология; $P \to Q$ выполнима, но не тавтология.

Проверка формулы на выполнимость

Очевидный алгоритм — перебор всех 2^n возможных оценок.

Открытый вопрос: существует ли алгортм, проверяющий формулу на выполнимость за полиномиальное число шагов (от длины формулы).

Проверка формулы на выполнимость — стандартный пример NP-полной задачи, поэтому этот вопрос эквивалентен знаменитой проблеме P=NP?.

Логическое следование

Опр.

Формула A *логически следует* (или *семантически следует*) из множества формул Γ, если $f(A) = \text{И}$ для любой выполняющей оценки f для Γ.

Обозначение: $\Gamma \models A$.

Пример.

$\{P \vee Q, R, \neg Q\} \models P \wedge R$.

Логическое следование

Опр.

Формула A *логически следует* (или *семантически следует*) из множества формул Γ, если $f(A) = \text{И}$ для любой выполняющей оценки f для Γ.

Обозначение: $\Gamma \vDash A$.

Пример.

$\{P \vee Q, R, \neg Q\} \vDash P \wedge R$.

Предложение.

1. A — тавтология $\iff$ $\varnothing \models A$.
2. Γ выполнимо $\iff$ $\Gamma \not\models \bot$, где $\bot \rightleftharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A$ $\iff$ $\Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

1. A — тавтология $\iff$ $\varnothing \models A$.
2. Γ выполнимо $\iff$ $\Gamma \not\models \bot$, где $\bot \rightleftharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

1. A — тавтология $\iff$ $\varnothing \models A$.
2. Γ выполнимо $\iff$ $\Gamma \not\models \bot$, где $\bot \rightleftharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Логическое следование из конечного множества формул сводится к понятию тавтологии.

Предложение.
$\{B_1, \ldots, B_n\} \models A \iff$
$(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \to A$ — *тавтология.*

Равносильные формулы

Опр.

Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\forall f \; f(A) = f(B)$, т.е. если $\varphi_A = \varphi_B$.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$; $\;P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Равносильные формулы

Опр.

Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\forall f \; f(A) = f(B)$, т.е. если $\varphi_A = \varphi_B$.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$; $\; P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Утверждение.

1. *Отношение* $\equiv$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — *тавтология, где* $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — *тавтология* $\iff A \equiv \top$, *где* $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Утверждение.

1. Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — тавтология, где $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — тавтология $\iff A \equiv \top$, где $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Утверждение.

1. *Отношение* $\equiv$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — *тавтология, где* $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — *тавтология* $\iff A \equiv \top$, *где* $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Основные равносильности

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) =$ Л.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$$

Операция подстановки

Опр.

Если C и D — формулы, а $P \in \mathrm{Var}$, то через $C[P/D]$ обозначим результат подстановки формулы D вместо всех вхождений P в C.

Пример.

Пусть $C = (P_1 \to P_2) \to P_2$ и $D = P_3 \to P_2$. Тогда

$$C[P_2/D] = (P_1 \to (P_3 \to P_2)) \to (P_3 \to P_2).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$
\begin{aligned}
&P[P/D] \rightleftharpoons D,\\
&Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \ \text{если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,\\
&(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),\\
&(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),\\
&(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),\\
&(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).
\end{aligned}
$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$
\begin{aligned}
&P[P/D] \rightleftharpoons D,\\
&Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var},\ Q \neq P,\\
&(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),\\
&(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),\\
&(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),\\
&(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).
\end{aligned}
$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \; Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \; Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \; Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
2. Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то

$$
\begin{aligned}
A_1 \wedge A_2 &\equiv B_1 \wedge B_2 \\
A_1 \vee A_2 &\equiv B_1 \vee B_2 \\
A_1 \to A_2 &\equiv B_1 \to B_2.
\end{aligned}
$$

Теорема. (о замене подформулы на эквивалентную)

Если $A \equiv B$, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Теорема доказывается индукцией по построению формулы C.

Пример.

Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.

Теорема. (о замене подформулы на эквивалентную)
Если $A \equiv B$, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Теорема доказывается индукцией по построению формулы C.

Пример.
Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.