Упражнение 1. Постройте вывод формулы $P \to P$ (*разобрано на лекции*).

Решение 1.

$$\begin{array}{ll}
(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P)) & \text{(схема 2)} \\
P \to ((P \to P) \to P) & \text{(схема 1)} \\
(P \to (P \to P)) \to (P \to P) & \text{(MP)} \\
P \to (P \to P) & \text{(схема 1)} \\
P \to P & \text{(MP)}
\end{array}$$

Упражнение 2. Постройте вывод формулы $Q \to P$ из гипотезы P.

Решение 2.

$$\begin{array}{ll}
P & \text{(гипотеза)} \\
P \to (Q \to P) & \text{(схема 1)} \\
Q \to P & \text{(MP)}
\end{array}$$

Упражнение 3. Постройте вывод формулы P из гипотезы $\neg\neg P$.

Решение 3.

$$\begin{array}{ll}
\neg\neg P & \text{(гипотеза)} \\
\neg\neg P \to P & \text{(схема 10)} \\
P & \text{(MP)}
\end{array}$$

Упражнение 4. Постройте вывод формулы P из гипотезы $\neg P \to P$.

Решение 4.

$$\begin{array}{ll}
\neg P \to P & \text{(гипотеза)} \\
(\neg P \to P) \to ((\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P) & \text{(схема 9)} \\
(\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P & \text{(MP)} \\
\neg P \to \neg P & \text{(Упр. 1)} \\
\neg\neg P & \text{(MP)} \\
P & \text{(Упр. 3)}
\end{array}$$

Для построения выводов в задачах 5–9 допустимо использование теоремы о дедукции и доказанных на лекциях выводимых правил (силлогизм, конрапозиция, ex falso).

Упражнение 5. Постройте вывод формулы $P \to \neg\neg P$.

Решение 5. Рассмотрим следующий вывод для $\neg\neg P$ с гипотезой P и применим теорему о дедукции:

$$\begin{array}{ll}
P & \text{(гипотеза)} \\
P \to (\neg P \to P) & \text{(схема 1)} \\
\neg P \to P & \text{(MP)} \\
\neg P \to \neg P & \text{(Упр. 1)} \\
(\neg P \to P) \to ((\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P) & \text{(схема 9)} \\
(\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P & \text{(MP)} \\
\neg\neg P & \text{(MP)}
\end{array}$$

Упражнение 6. Постройте вывод формулы $(P \to Q) \to Q$ из гипотезы P.

Решение 6. Рассмотрим следующий вывод для Q с гипотезами P и $P \to Q$ и применим теорему о дедукции:

P	(гипотеза)
$P \to Q$	(гипотеза)
Q	(MP)

Упражнение 7. Постройте вывод формулы $P \vee \neg P$.

Решение 7. Приведем наборок решения. Выведем $\neg\neg(P \vee \neg P)$, а затем воспользуемся законом снятия двойного отрицания (Упр. 3). Имеем аксиомы:

$$\vdash P \to (P \vee \neg P)$$
$$\vdash \neg P \to (P \vee \neg P)$$

Отсюда по принципу контрапозиции:

$$\vdash \neg(P \vee \neg P) \quad \to \quad \neg P$$
$$\vdash \neg(P \vee \neg P) \quad \to \quad \neg\neg P$$

Тогда по принципу $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$ (непосредственно следующему из аксиом), получаем требуемое.

Упражнение 8. Постройте выводы:

1) $P,\ Q \vdash P \wedge Q$	4) $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$
2) $P \vdash P \vee Q$	5) $\neg P,\ \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$
3) $\neg P \vdash P \to Q$	6) $P,\ \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$

Упражнение 9. Постройте вывод формулы $((P \to Q) \to P) \to P$.

Упражнение 10. Докажите, что если $\Gamma_1 \vdash A$ и $\Gamma_2, A \vdash B$, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B$.

Упражнение 11. Докажите, что если $\vdash A$, где A — формула, содержащая переменные $P_1, \ldots, P_n$ и только их, то существует вывод для A, в котором все формулы зависят лишь от переменных $P_1, \ldots, P_n$ (не обязательно всех).

Упражнение 12. Пусть $f\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ — любая оценка пропозициональных переменных. Докажите, что множество формул $\Gamma_f := \{A | f(A) = 1\}$ является максимальным непротиворечивым.

Упражнение 13. Назовем множество формул Γ *полным*, если для любой формулы A из гипотез Γ выводима ровно одна из формул A, $\neg A$. Докажите, что Γ полно тогда и только тогда, когда множество всех формул, выводимых из Γ, максимальное непротиворечивое.

Упражнение 14. В данной задаче мы будем рассматривать лишь формулы от пропозициональных переменных P, Q и R. Проверьте заданные множества на непротиворечивость и полноту. Для непротиворечивых множеств постройте полные расширения.

1) $\{P \to Q,\ Q \to P\}$	4) $\{P \vee Q \to R,\ \neg R,\ P \vee Q\}$
2) $\emptyset$	5) $\{P \wedge Q \to Q \vee R,\ R,\ \neg(P \vee Q)\}$
3) $\{P \wedge Q \wedge R\}$	6) $\{\neg(P \to \neg Q),\ \neg P\}$

Решение 14. Часть 1). Множество $\Gamma = \{P \to Q,\ Q \to P\}$ непротиворечиво, поскольку оценка f, сопоставляющая всем переменным значение И (истина), является выполняющей оценкой для Γ, то есть $f(P \to Q) = 1$ и $f(Q \to P) = 1$. По теореме о корректности исчисления высказываний, выполнимые множества формул непротиворечивы.

Γ не является полным, поскольку $\Gamma \not\vdash P$ и $\Gamma \not\vdash \neg P$. Оба утверждения доказываются предъявлением выполняющих оценок для Γ, при которых ложны, соответственно, формулы P и $\neg P$:

P	Q	R
0	0	0

P	Q	R
1	1	0

Полное расширение Γ можно получить из любой из этих оценок на основе задачи 12. Например, можно взять $\Delta = \Gamma \cup \{P, Q, \neg R\}$. Докажем полноту множества Δ.

Единственной выполняющей оценкой для Δ является функция f, задаваемая правой таблицей выше. Поэтому, для любой формулы A, если $f(A) = 1$, то $\Delta \models A$, если же $f(A) = 0$, то $\Delta \models \neg A$. В первом случае по теореме о (сильной) полноте исчисления высказываний получаем $\Delta \vdash A$, а во втором случае $\Delta \vdash \neg A$.