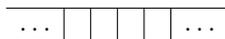


Машины Тьюринга.

Одноленточная машина Тьюринга работает с неограниченной в обе стороны лентой, разбитой на ячейки:



В каждой ячейке записана одна буква *рабочего (ленточного) алфавита* Σ . Предполагается, что в Σ есть специальный символ "пробел" (например, "#") для обозначения пустых ячеек. Имеется читающе-пишущая головка, которая может обрабатывать содержимое ячейки и перемещаться вдоль ленты. Управляет этим процессом *управляющее устройство* (УУ), которое может находиться в одном из конечного множества состояний Q . УУ исполняет программу, состоящую из команд вида

Команда:	Действие:
$qa \mapsto q'a'$	в состоянии $q \in Q$ обзревая ячейку с буквой $a \in \Sigma$ заменяет букву на $a' \in \Sigma$ и меняет состояние на $q' \in Q$
$qa \mapsto q'a'R$	то же, но сдвигает головку на одну клетку направо
$qa \mapsto q'a'L$	то же, но сдвигает головку на одну клетку налево

В программе содержится ровно по одной команде с каждой возможной левой частью (qa), порядок несущественен. В каждый момент времени исполняется ровно одна команда с подходящей левой частью. В множестве всех состояний Q выделено начальное состояние, с которого УУ начинает работу, и заключительное состояние — в котором работа УУ прекращается.

Соглашения:

1. Начальное состояние — q_1 , заключительное — q_0 .
2. При написании программ явно выписывать только "нетривиальные" команды — отличные от $qa \rightarrow qa$.
3. Натуральные числа представляются на ленте в унарной записи — число n записывается как $\underbrace{11\dots 1}_n$.
4. В начале работы конечный кусок ленты заполнен входными данными, а все остальные клетки содержат символ #. При этом головка расположена непосредственно слева от входных данных.
5. После завершения работы результатом является то слово на ленте (последовательность букв между соседними "#"), на которое указывает головка. Последнее означает, что головка остановилась внутри слова или непосредственно слева от него. В частности, если головка остановилась на букве # и в соседней справа клетке также стоит #, то результат — пустое слово.

6. При вычислении функций нескольких переменных аргументы на ленте разделяются одним символом #.
7. При вычислении частичной функции машина Тьюринга останавливается в том и только в том случае, когда функция определена.

Задачи

Написать программы для машины Тьюринга, выполняющие следующие преобразования слов:

Задача 1. Заменить во входном слове из 0 и 1 все буквы 0 на 1 и наоборот.

Решение.

$$\begin{aligned}
 q_1 \# &\mapsto q_2 \# R \\
 q_2 0 &\mapsto q_2 1 R \\
 q_2 1 &\mapsto q_2 0 R \\
 q_2 \# &\mapsto q_0 \# L
 \end{aligned}$$

Задача 2. Переместить 0 через блок единиц ($\#011\dots 1\# \rightsquigarrow \#11\dots 10\#$).

Решение.

$$\begin{aligned}
 q_1 \# &\mapsto q_2 \# R \\
 q_2 0 &\mapsto q_2 \# R \\
 q_2 1 &\mapsto q_2 1 R \\
 q_2 \# &\mapsto q_0 0 L
 \end{aligned}$$

Задача 3. Во входном слове из 0 и 1 переместить первую букву в конец слова.

Решение.

$$\begin{array}{llll}
 q_1 \# &\mapsto q_2 \# R & q_3 0 &\mapsto q_3 0 R & q_4 0 &\mapsto q_4 0 R \\
 q_2 0 &\mapsto q_3 \# R & q_3 1 &\mapsto q_3 1 R & q_4 1 &\mapsto q_4 1 R \\
 q_2 1 &\mapsto q_4 1 R & q_3 \# &\mapsto q_0 0 L & q_4 \# &\mapsto q_0 1 L
 \end{array}$$

Задача 4. Удвоение блока из 1.

Решение. Указание: используя дополнительную букву x в качестве двойника 1, реализовать следующие преобразования.

$$\begin{aligned}
 \#111\# &\rightsquigarrow \#a11\# && \rightsquigarrow \#a11a\# \\
 &\rightsquigarrow \#aa1a\# && \rightsquigarrow \#aa1aa\# \\
 &\rightsquigarrow \#aaaaa\# && \rightsquigarrow \#aaaaaa\# \\
 &&& \rightsquigarrow \#111111\#
 \end{aligned}$$

Задача 5. Обратить слово из 0 и 1 (на выходе буквы слова в обратном порядке).

Задача 6. Прибавить 1 к натуральному числу, записанному в двоичной записи.

Задача 7. Преобразовать унарную запись натурального числа в его двоичную запись.

Ниже предполагается, что натуральные числа записываются на ленте машины Тьюринга в унарной записи, несколько аргументов разделяются пробелами ($\#$). Написать программы для машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции натурального аргумента:

Задача 8. $f(x, y) = x + y$.

Решение. Указание: заменить $\#$ внутри слова $1 \dots 1 \# 1 \dots 1$ на 1, после чего заменить последнюю 1 на $\#$.

Задача 9.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} q_1 \# &\mapsto q_2 \# R \\ q_2 1 &\mapsto q_2 \# R \\ q_2 \# &\mapsto q_0 \# R \end{aligned}$$

Задача 10.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } x \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Задача 11. $f(x, y) = |x - y|$.

Решение. Указание: стирать по одной единице из записей x и y , пока один из этих блоков единиц не станет пустым. Учесть, что последняя стертая единица — лишняя, и ее надо восстановить.

$$\begin{array}{lll} q_1 \# &\mapsto q_2 \# R & q_6 1 &\mapsto q_7 \# L & q_2 \# &\mapsto q_0 \# \\ q_2 1 &\mapsto q_3 \# R & q_7 1 &\mapsto q_7 1 L & q_4 \# &\mapsto q_{10} \# L \\ q_3 1 &\mapsto q_3 1 R & q_7 \# &\mapsto q_8 \# L & q_{10} \# &\mapsto q_0 1 \\ q_3 \# &\mapsto q_4 \# R & q_8 1 &\mapsto q_9 1 L & q_8 \# &\mapsto q_{11} \# R \\ q_4 1 &\mapsto q_5 1 R & q_9 1 &\mapsto q_9 1 L & q_{11} \# &\mapsto q_0 1 \\ q_5 1 &\mapsto q_5 1 R & q_9 \# &\mapsto q_2 \# R & & \\ q_5 \# &\mapsto q_6 \# L & & & & \end{array}$$

Задача 12. $f(x) = 2x$.

Решение. См. задачу 4.

Задача 13. $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$.

Задача 14. $f(x) = x \bmod 2$.