Разрешимые и перечислимые множества

Множество $A \subseteq N$ называется *разрешимым* (рекурсивным), если его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Множество $A \subseteq N$ называется *полуразрешимым*, если его полухарактеристическая функция

$$\pi_A(x) \simeq \begin{cases} 1, & x \in A \\ \text{не определено}, & x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Множество $A \subseteq N$ называется *перечислимым* (рекурсивно перечислимым), если $A = \emptyset$ или существует вычислимая последовательность f (т.е. вычислимая тотальная функция $f : N \longrightarrow N$), для которой $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$. Такое представление множества называется его вычислимым пересчетом.

Определения естественно переносятся на случай $A \subseteq X$, где X — произвольный тип конструктивных объектов ($X = N^k, \Sigma^*, \ldots$) . При решении задач предполагается использование тезиса Чёрча-Тьюринга, согласно которому для доказательства вычислимости функции достаточно предложить неформализованный алгоритм ее вычисления.

Задачи

Задача 1. Проверить разрешимость множеств:

(а) всех нечетных чисел;

(б) всех простых чисел;

(в) данного конечного множества;

(г) множества всех решений $(x, y) \in N^2$ уравнения $x^2 - y^2 > 5$.

(д) множества всех обратимых $m \times n-$матриц с коэффициентами из N.

Решение. (а) Алгоритм вычисления остатка от деления натурального числа на 2 вычисляет характеристическую функцию множества всех нечетных чисел.

(в) Для вычисления значения характеристической функции $\chi_A(x)$ множества $A = \{n_1, \ldots, n_k\}$ достаточно последовательно сравнить число x с каждым из чисел $n_1, \ldots, n_k$. Если оно совпадет с одним из них, то значение равно 1, иначе — 0.

Задача 2. Проверить полуразрешимость множеств:

(а) каждого разрешимого множества;

(б) множества всех пар простых чисел – близнецов;

(в) множества всех чисел, представимых в виде суммы квадратов двух попарно различных нечетных чисел;

(г) множества тех $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in N^5$, для которых уравнение $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = 0$ имеет решение в целых числах.

Решение. (а) Для вычисления значения $\pi_A(x)$ полухарактеристической функции разрешимого множества A следует воспользоваться алгоритмом вычисления его характеристической функции и вычислить значение $\chi_A(x)$. Если это 1, то в качестве результата выдать 1. Если это 0, то не выдавать никакого результата.

(б) и (в) следуют из (а).

(г) Для вычисления значения $\pi_A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ следует организовать перебор целых чисел $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. На каждом шаге перебора очередное значение x подставляется в левую часть уравнения. Если значении левой части оказалось 0, то перебор прерывается и выдается результат 1. В противном случае алгоритм переходит к следующему значению x.

Задача 3. (а) Доказать, что для каждого полуразрешимого множества A существует алгоритм, который работает вечно, время от времени посылая в выходной поток натуральные числа $a \in A$ таким образом, что каждый элемент A когда-нибудь в нем появится.

(б) Доказать, что каждое полуразрешимое множество перечислимо.

(в) Доказать, что каждое перечислимое множество полуразрешимо.

Решение. (а) Пусть множество A полуразрешимо. Тогда его полухарактеристическая функция π_A вычислима с помощью некоторой машины Тьюринга M. Тьюринговы вычисления происходят по шагам, что позволяет определить шаги вычисления значения $\pi_A(x)$ как шаги работы соответствующей машины Тьюринга M.

Искомый алгоритм моделирует параллельное вычисление значений

$$\pi_A(0), \pi_A(1), \ldots, \pi_A(n), \ldots$$

следующим образом: на своем шаге n он моделирует n шагов каждого из вычислений

$$\pi_A(0), \pi_A(1), \ldots, \pi_A(n).$$

Если к моменту n какое-либо из моделируемых вычислений $\pi_A(i)$, $i \leq n$, закончилось, то соответствующее значение i отправляется в выходной поток.

(б) Указание: в случае бесконечного множества A использовать алгоритм из предыдущей задачи для вычисления значения

$$f(i) = i\text{-ый новый элемент выходного потока.}$$

Задача 4. Доказать исходя из определений:

(а) если $A, B \subseteq N$ разрешимы, то $A \cup B, A \cap B, \overline{A}$ также разрешимы.

(б) если $A, B \subseteq N$ полуразрешимы, то $A \cup B, A \cap B$ также полуразрешимы.

(в) если $A, B \subseteq N$ перечислимы, то $A \cup B, A \cap B$ также перечислимы.

Решение. (б) Случай $\cup$. Указание: организовать параллельное вычисление значений $\pi_A(x)$ и $\pi_B(x)$ аналогично тому, как это сделано в решении задачи 3 (а).

(в) Случай $\cap$. Если $A \cap B$ пусто, то оно перечислимо по определению. Рассмотрим случай $A \cap B \neq \emptyset$. Фиксируем некоторый элемент $z \in A \cap B$. Пусть вычислимые последовательности f и g таковы, что

$$A = \{f(0), f(1), \ldots\} \qquad B = \{g(0), g(1), \ldots\},$$

а $\theta\colon N \to N^2$ — вычислимая биекция между N и N^2 (см. лекции). Вычислимый пересчет пересечения задается следующим алгоритмом:

> Вход: число $i \in N$. Вычислить пару чисел $(x, y) = \theta(i)$. Если $x = y$, то результат есть x. В противном случае результат есть z.

Задача 5. Доказать следующие утверждения.

(а) Проекция каждого перечислимого множества $R \in N^2$ на первую координату является перечислимым множеством.

(б) Каждое полуразрешимое множество может быть получено как проекция некоторого разрешимого множества.

(с) Получить в качестве следствия из (а),(б), что каждое полуразрешимое множество перечислимо. (Это еще одно решение задачи 3(б).)

Решение. (б) Указание: заметить разрешимость множества

$$\{(x, t) \mid \text{алгоритм вычисления } \pi_A(x) \text{ кончает работу за } t \text{ шагов}\}.$$

Задача 6. Пусть $f : N \to N$ (частичная) вычислимая функция, $A \in N$. Доказать следующие утверждения.

(а) Если множество A перечислимо, то множества $f(A)$, $f^{-1}(A)$ также перечислимы.

(б) Если множество A разрешимо, а f тотальна, то множество $f^{-1}(A)$ также разрешимо.

Задача 7. Доказать, что каждое бесконечное перечислимое множество A обладает вычислимым пересчетом без повторений: $A = \{f(0), f(1), \ldots\}$, где f — тотальная вычислимая функция, $f(i) \neq f(j)$ при $i \neq j$.

Задача 8. (а) Доказать, что непустое множество $A \subseteq N$ обладает монотонным вычислимым пересчетом

$$A = \{f(0), f(1), \ldots\}, \quad f(i) \leq f(i+1), \quad i = 0, 1, \ldots$$

тогда и только тогда, когда оно разрешимо.

(б) Доказать, что для бесконечных множеств условие монотонности в (а) можно заменить на более слабое: $f(x) \geq g(x)$ для некоторой неубывающей неограниченной тотальной вычислимой функции g.

Задача 9. (Теорема о графике) Доказать, что функция $f : N \to N$ вычислима тогда и только тогда, когда ее график $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ перечислим.

Задача 10. (а) Доказать, что у тотальной вычислимой функции $f : N \to N$ график $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ разрешим.

(б) Построить пример нетотальной вычислимой функции $f : N \to N$ с разрешимым графиком.