

Введение в математическую логику

Лекция 3

Лев Дмитриевич Беклемишев
<http://lpcs.math.msu.su/vml2009>

`lbek1@yandex.ru`

26.02.2008

Исчисление высказываний

Аксиомы:

- 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
- 2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
- 3 $A \wedge B \rightarrow A$, $A \wedge B \rightarrow B$,
- 4 $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$,
- 5 $A \rightarrow A \vee B$, $B \rightarrow A \vee B$,
- 6 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$,
- 7 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$,
- 8 $\neg\neg A \rightarrow A$.

Правило вывода (modus ponens):

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} (MP).$$

Опр.

Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из некоторых предыдущих формул по правилу вывода.

Правило вывода (modus ponens):

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (MP)}.$$

Опр.

Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из некоторых предыдущих формул по правилу вывода.

Пример.

$P \rightarrow Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \rightarrow Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \rightarrow Q \vee P) \rightarrow ((Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P))$

$(Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \rightarrow Q \vee P$ (MP)

Пример.

$$P \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$(P \rightarrow Q \vee P) \rightarrow ((Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P))$$

$$(Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P) \quad (\text{MP})$$

$$P \vee Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{MP})$$

Пример.

$$P \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$(P \rightarrow Q \vee P) \rightarrow ((Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P))$$

$$(Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P) \quad (\text{MP})$$

$$P \vee Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{MP})$$

Пример.

$$P \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$(P \rightarrow Q \vee P) \rightarrow ((Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P))$$

$$(Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P) \quad (\text{MP})$$

$$P \vee Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{MP})$$

Пример.

$$P \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{аксиома 5})$$

$$(P \rightarrow Q \vee P) \rightarrow ((Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P))$$

$$(Q \rightarrow Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow Q \vee P) \quad (\text{MP})$$

$$P \vee Q \rightarrow Q \vee P \quad (\text{MP})$$

Опр.

Формула A называется *выводимой* в исчислении высказываний или *теоремой* исчисления высказываний (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A .

Пример.

$\vdash P \vee Q \rightarrow Q \vee P.$

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A.$

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A$.

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A$.

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A$.

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A$.

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Пример.

$\vdash A \rightarrow A.$

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \rightarrow A)$ и $C = A$.

$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (2)

$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (1)

$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (MP)

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (1)

$A \rightarrow A$ (MP)

Выводимость из гипотез

Опр.

Пусть Γ — некоторое множество формул, называемых *гипотезами*.

Выводом из Γ называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ , либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по правилу вывода.

Пример.

Вывод из множества гипотез $\{P \wedge Q\}$:

$P \wedge Q$ (гипотеза)

$P \wedge Q \rightarrow P$

P (MP)

$P \wedge Q \rightarrow Q$

Q (MP)

$Q \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge P)$

$P \rightarrow Q \wedge P$ (MP)

$Q \wedge P$ (MP)

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул Γ* (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ , в котором последняя формула есть A .

Замечание.

Вместо $\{B_1, \dots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \dots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул Γ* (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ , в котором последняя формула есть A .

Замечание.

Вместо $\{B_1, \dots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \dots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул Γ* (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ , в котором последняя формула есть A .

Замечание.

Вместо $\{B_1, \dots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \dots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Корректность исчисления высказываний

Предложение.

Всякая выводимая формула является тавтологией.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы A .

Предложение.

Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vDash A$.

Корректность исчисления высказываний

Предложение.

Всякая выводимая формула является тавтологией.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы A .

Предложение.

Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vDash A$.

Теорема о дедукции для исчисления высказываний

Теорема.

Если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, то $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Упрощает построение выводов в исчислении высказываний.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ , то:

$$\begin{array}{l} B \\ B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (1) \\ A \rightarrow B \quad \quad \quad (MP) \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \rightarrow A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ , то:

$$\begin{array}{l} B \\ B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (1) \\ A \rightarrow B \quad \quad \quad (MP) \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \rightarrow A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ , то:

$$\begin{array}{l} B \\ B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (1) \\ A \rightarrow B \quad \quad \quad (MP) \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \rightarrow A$.

Пусть B получена из C и $C \rightarrow B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \rightarrow C)$ и $\Gamma \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (2)$$

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{MP})$$

$$A \rightarrow B \quad (\text{MP})$$

Пусть B получена из C и $C \rightarrow B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \rightarrow C)$ и $\Gamma \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (2)$$

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{MP})$$

$$A \rightarrow B \quad (\text{MP})$$

Пусть B получена из C и $C \rightarrow B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \rightarrow C)$ и $\Gamma \vdash (A \rightarrow (C \rightarrow B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)) \quad (2)$$

$$(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (\text{MP})$$

$$A \rightarrow B \quad (\text{MP})$$

Замечание.

Вместо $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ обычно пишут $\Gamma, A \vdash B$.

Следствие.

$\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \rightarrow B$

Полезные выводимые правила

Пример.

(силлогизм) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Доказательство.

Дважды по правилу modus ponens выводим

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C.$$

Применяем теорему о дедукции.

Полезные выводимые правила

Пример.

(силлогизм) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Доказательство.

Дважды по правилу modus ponens выводим

$$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C.$$

Применяем теорему о дедукции.

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(контрапозиция) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ (MP)

$\neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

$A \rightarrow \neg B$ (MP)

$\neg A$ (MP)

Пример.

(ex falso) $A, \neg A \vdash B$.

ex falso sequitur quodlibet (лат.) «из ложного
следует всё, что угодно»

Доказательство.

Выводим, опираясь на аксиомы 1 (дважды), 7 и 8:

$$A, \neg A \vdash \neg B \rightarrow A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B.$$

Пример.

(ex falso) $A, \neg A \vdash B$.

ex falso sequitur quodlibet (лат.) «из ложного
следует всё, что угодно»

Доказательство.

Выводим, опираясь на аксиомы 1 (дважды), 7 и 8:

$$A, \neg A \vdash \neg B \rightarrow A, \neg B \rightarrow \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B.$$

Непротиворечивые множества формул

Опр.

Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

В противном случае Γ называется *непротиворечивым*.

Замечание.

Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B в силу выводимости $A, \neg A \vdash B$.

Замечание.

Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Замечание.

Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B в силу выводимости $A, \neg A \vdash B$.

Замечание.

Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Лемма.

$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Возьмём B в качестве A .

(\Rightarrow) Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \rightarrow A, B \rightarrow \neg A$. По аксиоме

$(B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Лемма.

$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Возьмём B в качестве A .

(\Rightarrow) Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \rightarrow A, B \rightarrow \neg A$. По аксиоме

$(B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Лемма.

$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.

(\Leftarrow) Возьмём B в качестве A .

(\Rightarrow) Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \rightarrow A, B \rightarrow \neg A$. По аксиоме

$(B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
 $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
 $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.