

Введение в математическую логику

Лекция 4

Лев Дмитриевич Беклемишев
<http://lpcs.math.msu.su/vml2009>

`lbek1@yandex.ru`

5.03.2009

Непротиворечивые множества формул

Опр.

Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

В противном случае Γ называется *непротиворечивым*.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B .
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B .
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B .
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
 $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
 $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \equiv \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.

Теорема Линденбаума

Теорема.

Для всякого непротиворечивого множества формул Δ найдётся максимальное непротиворечивое $\Gamma \supseteq \Delta$.

Доказательство.

Пусть A_0, A_1, \dots — пересчёт всех формул языка. Определим последовательность множеств

$$\Delta = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots$$

и положим $\Gamma \Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Теорема Линденбаума

Теорема.

Для всякого непротиворечивого множества формул Δ найдётся максимальное непротиворечивое $\Gamma \supseteq \Delta$.

Доказательство.

Пусть A_0, A_1, \dots — пересчёт всех формул языка. Определим последовательность множеств

$$\Delta = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \subseteq \Gamma_n \subseteq \dots$$

и положим $\Gamma \Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

$$\Gamma_0 = \Delta$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, & \text{если } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ не прот.;} \\ \Gamma_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $\Gamma \Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Утверждение.

Γ — максимальное непротиворечивое множество.

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Утверждение.

Γ — максимальное непротиворечивое множество.

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Утверждение.

Γ — максимальное непротиворечивое множество.

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Замечание.

Для несчётного языка теорема Линденбаума доказывается, опираясь на лемму Цорна (эквивалентную аксиоме выбора). Заметим, что объединение возрастающей цепи непротиворечивых множеств непротиворечиво.

Свойства максимальных непротиворечивых множеств

Предложение.

Пусть Γ — максимальное непротиворечивое множество. Тогда для любых A, B

$$а) \neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma;$$

$$б) (A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma;$$

$$в) (A \vee B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ или } B \in \Gamma;$$

$$г) (A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma \text{ или } B \in \Gamma.$$

Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема.

Множество Γ непротиворечиво тогда и только тогда, когда Γ выполнимо.

Доказательство.

(Выполнимость влечёт непротиворечивость.)

Пусть f — такая оценка, что $f(A) = И$ для всех формул $A \in \Gamma$. Индукцией по построению вывода убедимся, что $f(B) = И$ для любой формулы B такой, что $\Gamma \vdash B$. Тем самым, $\Gamma \not\vdash C, \neg C$ ни для какой C .

(Непротиворечивость влечёт выполнимость.)

Допустим, что Γ непротиворечиво.

- По теореме Линденбаума расширим Γ до максимального непротиворечивого множества формул Δ .
- Определим оценку $f = f_\Delta$ следующим образом: для любой переменной P

$$f(P) = \text{И} \stackrel{\text{def}}{\iff} P \in \Delta.$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = И \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = И &\iff f(B) \neq И \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = И \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = И &\iff f(B) \neq И \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
 $f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \text{Var}$ — по определению f .
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

- $A = (B \rightarrow C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \rightarrow C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \rightarrow C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \rightarrow C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \rightarrow C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \rightarrow C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \rightarrow C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \rightarrow C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \rightarrow C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \rightarrow C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

Из леммы вытекает выполнимость Γ при данной оценке f :

Поскольку $\Gamma \subseteq \Delta$, для любой $A \in \Gamma$ получаем $f(A) = \perp$, что и требовалось доказать.

Теорема. (полнота)

Всякая тавтология выводима в исчислении высказываний.

Теорема. (сильная полнота)

Для любого множества формул Γ и любой формулы A

$$\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A.$$

Теорема. (полнота)

Всякая тавтология выводима в исчислении высказываний.

Теорема. (сильная полнота)

Для любого множества формул Γ и любой формулы A

$$\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A.$$

Доказательство.

$\Gamma \models A$ влечёт невыполнимость множества
 $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

По доказанной теореме множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$
противоречиво и тем самым $\Gamma \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний
равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.

$$\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A.$$

Следствие.

(компактность)

$\Gamma \models A \iff \Gamma_0 \models A$ для любого конечного
подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний
равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.

$$\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A.$$

Следствие.

(компактность)

$\Gamma \models A \iff \Gamma_0 \models A$ для любого конечного
подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.

$$\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A.$$

Следствие.

(компактность)

$\Gamma \models A \iff \Gamma_0 \models A$ для любого конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Свойства максимальных непротиворечивых множеств

Предложение.

Пусть Γ — максимальное непротиворечивое множество. Тогда для любых A, B

$$a) \neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma;$$

$$б) (A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma;$$

$$в) (A \vee B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ или } B \in \Gamma;$$

$$г) (A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma \text{ или } B \in \Gamma.$$

Доказательство.

$$a) \neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma.$$

Рассуждаем от противного.

(\Rightarrow) Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальнойности. Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

Доказательство.

$$a) \neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma.$$

Рассуждаем от противного.

(\Rightarrow) Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальнойности. Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

Доказательство.

$$a) \neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma.$$

Рассуждаем от противного.

(\Rightarrow) Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальнойности.

Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$
противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$,
т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай
 $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma \text{ и } B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

(\Leftarrow) Пусть $(A \wedge B) \notin \Gamma$ и $A, B \in \Gamma$. Тогда по
максимальности $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)$.

С другой стороны, по аксиоме $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
имеем $\Gamma \vdash A \wedge B$.

(\Leftarrow) Пусть $(A \wedge B) \notin \Gamma$ и $A, B \in \Gamma$. Тогда по
максимальности $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)$.

С другой стороны, по аксиоме $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
имеем $\Gamma \vdash A \wedge B$.

2) $(A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.
Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens
 $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

2) $(A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.
Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens
 $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

2) $(A \rightarrow B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

(\Rightarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \notin \Gamma, A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальной $\Gamma \vdash \neg A, \Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$.

Заметим, что $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$.

Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \rightarrow B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания

$\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальнойности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$.

Заметим, что $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$.

Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \rightarrow B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания

$\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

(\Leftarrow) Допустим $(A \rightarrow B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальнойности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$.

Заметим, что $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$.

Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \rightarrow B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания

$\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \rightarrow B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Случай $(A \rightarrow B) \notin \Gamma, B \in \Gamma$ рассматривается аналогично, с использованием выводимости $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$. Последняя вытекает с помощью контрапозиции из очевидного $B \vdash A \rightarrow B$.

Другие варианты исчисления высказываний

- Секвенциальные (генценовские) исчисления
- Исчисления натурального вывода
- Исчисления эквивалентностей
- Исчисления резолюций
- Алгебраические исчисления
- и т.д.

Исчисление эквивалентностей

- Оперлируем с формальными выражениями вида $A \equiv B$.

Аксиомы:

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$A \wedge \neg A \equiv \perp$	$A \vee \neg A \equiv \top$

Исчисление эквивалентностей

- Оперлируем с формальными выражениями вида $A \equiv B$.

Аксиомы:

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$A \wedge \neg A \equiv \perp$	$A \vee \neg A \equiv \top$

Правила вывода:

$$\frac{B \equiv A}{A \equiv B} \text{ (симметричность)}$$

$$\frac{A \equiv B \quad B \equiv C}{A \equiv C} \text{ (транзитивность)}$$

$$\frac{A \equiv B}{C[P/A] \equiv C[P/B]} \text{ (экв. замена)}$$

Теорема о полноте

Теорема.

Равносильность $A \equiv B$ выводима \iff формулы A и B (семантически) эквивалентны.

Доказательство.

Пусть A и B равносильны. Приведём A и B к графически равным СДНФ A' и B' . При этом достаточно использовать лишь аксиомы исчисления равносильностей. Это даёт выводы $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$. По правилам симметричности и транзитивности выводим $A \equiv B$.

Теорема о полноте

Теорема.

Равносильность $A \equiv B$ выводима \iff формулы A и B (семантически) эквивалентны.

Доказательство.

Пусть A и B равносильны. Приведём A и B к графически равным СДНФ A' и B' . При этом достаточно использовать лишь аксиомы исчисления равносильностей. Это даёт выводы $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$. По правилам симметричности и транзитивности выводим $A \equiv B$.

Другие варианты формальной семантики

- Теоретико-множественная семантика.

Пусть U — непустое множество; $\mathcal{P}(U)$ — множество всех его подмножеств.

Оценка $f : \text{Var} \rightarrow \mathcal{P}(U)$.

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \Rightarrow U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \cup f(B)$
- $f(A \rightarrow B) \Rightarrow (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \Rightarrow U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \cup f(B)$
- $f(A \rightarrow B) \Rightarrow (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \Rightarrow U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \cup f(B)$
- $f(A \rightarrow B) \Rightarrow (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \Rightarrow U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \cup f(B)$
- $f(A \rightarrow B) \Rightarrow (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \Rightarrow U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \Rightarrow f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \Rightarrow f(A) \cup f(B)$
- $f(A \rightarrow B) \Rightarrow (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Замечание.

Если взять $U = \{0\}$, теоретико-множественная семантика сводится к стандартной двузначной:
 $L = \emptyset$, $I = U$.

Замечание.

Если взять $U = \mathbb{R}^2$ и если для $P \in \text{Var } f(P)$ — круги на плоскости, получаем *диаграммы Венна*, известные из школы.

- Алгебраическая семантика.

Опр.

Множество **B** с заданными на нём константами **0**, **1** и операциями \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , которые удовлетворяют равенствам

$$a \wedge \neg a = 0, \quad a \vee \neg a = 1$$

и равенствам, соответствующим таблице основных эквивалентностей, называется *булевой алгеброй*.

(Читаем \equiv как $=$; a , b , c означают элементы множества **B**.)

$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a = a$	$a \rightarrow b = \neg a \vee b$
$a \wedge \neg a = 0$	$a \vee \neg a = 1$

Пример.

$$a \vee 1 = a \vee (a \vee \neg a) = (a \vee a) \vee \neg a = a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge 1 = a \wedge (a \wedge 1) = a \wedge (a \vee (a \wedge \neg a)) = a \wedge (a \vee 0) = a$$

$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a = a$	$a \rightarrow b = \neg a \vee b$
$a \wedge \neg a = 0$	$a \vee \neg a = 1$

Пример.

$$a \vee 1 = a \vee (a \vee \neg a) = (a \vee a) \vee \neg a = a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge 1 = a \wedge (a \wedge 1) = a \wedge (a \vee (a \wedge \neg a)) = a \wedge (a \vee 0) = a$$

Примеры булевых алгебр

- \mathbb{B}
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- Fm/\equiv (алгебра Линденбаума), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$.

Примеры булевых алгебр

- \mathbb{B}
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- Fm/\equiv (алгебра Линденбаума), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$.

Примеры булевых алгебр

- \mathbb{B}
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- Fm/\equiv (алгебра Линденбаума), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$.

Оценка $f : \text{Var} \rightarrow \mathbf{B}$.

Значение $f(A) \in \mathbf{B}$ формулы A вычисляется в соответствии с заданными на \mathbf{B} операциями.

Каждая из указанных семантик задаёт одно и то же множество тавтологий, то есть имеет место следующая теорема (без доказательства).

Теорема.

Для любого множества U и любой булевой алгебры \mathbf{B} равносильны следующие утверждения.

- 1 A — тавтология;
- 2 $f(A) = U$ для любой оценки $f : \text{Var} \rightarrow \mathcal{P}(U)$;
- 3 $f(A) = 1$ для любой оценки $f : \text{Var} \rightarrow \mathbf{B}$.