Логика предикатов лекция 8

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2009

lbekl@yandex.ru

02.04.2009

Непротиворечивость теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$.

Опр.

Теория T *противоречива*, если существует A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*.

Следствие.

$T \cup \{A\}$ противоречива $\iff$ $T \vdash \neg A$.

Непротиворечивость теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$.

Опр.

Теория T *противоречива*, если существует A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*.

Следствие.

$T \cup \{A\}$ противоречива $\iff$ $T \vdash \neg A$.

Непротиворечивость теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$.

Опр.

Теория T *противоречива*, если существует A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*.

Следствие.

$T \cup \{A\}$ противоречива $\iff$ $T \vdash \neg A$.

Теорема о корректности исчисления предикатов

Теорема.

Если $M \models T$ и $T \vdash A$, то $M \models A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода A в T.

Следствие.

Если $\vdash A$, то A общезначима.

Теорема о корректности исчисления предикатов

Теорема.

Если $M \models T$ и $T \vdash A$, то $M \models A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода A в T.

Следствие.

Если $\vdash A$, то A общезначима.

Доказательства непротиворечивости

Следствие.

Если теория T имеет модель, то T непротиворечива.

Следствие.

Следующие теории непротиворечивы:

- исчисление предикатов (пустая теория);
- теория отношения эквивалентности;
- теория групп;
- элементарная геометрия.

Доказательства независимости

Следствие.

Если существует модель M теории T для которой $M \not\models A$, то $T \nvdash A$.

Пример.

Модель Пуанкаре $\mathbf{H}^2$ показывает, что аксиома Евклида независима от остальных аксиом элементарной геометрии.

Теорема Гёделя о полноте

Теорема.

1. *Всякая непротиворечивая теория T выполнима, то есть имеет модель $M \models T$.*
2. *Если $T \not\vdash A$, то найдётся модель $M \models T$ для которой $M \not\models A$.*
3. *$T \models A$ влечёт $T \vdash A$.*

Покажем равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то по теореме о дедукции $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 3)$: очевидно.

$(3 \Rightarrow 1)$: Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvdash A$, следовательно $T \nvDash A$ и у теории T должна быть модель (опровергающая A).

Покажем равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то по теореме о дедукции $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 3)$: очевидно.

$(3 \Rightarrow 1)$: Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvdash A$, следовательно $T \nvDash A$ и у теории T должна быть модель (опровергающая A).

Покажем равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то по теореме о дедукции $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 3)$: очевидно.

$(3 \Rightarrow 1)$: Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvDash A$, следовательно $T \nvdash A$ и у теории T должна быть модель (опровергающая A).

Покажем равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то по теореме о дедукции $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 3)$: очевидно.

$(3 \Rightarrow 1)$: Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvdash A$, следовательно $T \nvDash A$ и у теории T должна быть модель (опровергающая A).

Теорема Мальцева о компактности

Теорема.

1. *Теория* T *выполнима* $\iff$ *любое конечное подмножество* $T_0 \subseteq T$ *выполнимо.*
2. $T \models A$ $\iff$ *существует такое конечное множество* $T_0 \subseteq T$*, что* $T_0 \models A$*.*

Нестандартные модели арифметики

Пример.

Пусть $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ — стандартная модель арифметики и $Th(\mathbb{N})$ есть множество *всех* истинных в $\mathbb{N}$ предложений.

Добавим к сигнатуре новую константу c и рассмотрим теорию

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cup \{\neg c = 0, \neg c = S0, \neg c = SS0, \dots\}.$$

Терм $\bar{n} \rightleftharpoons SS\dots S0$ (n раз) называем *нумералом*. Нумералы служат именами натуральных чисел.

Утверждение.

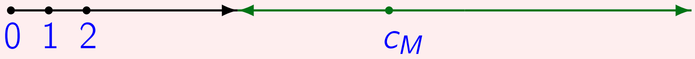
Каждая конечная подтеория $T_0 \subseteq T$ выполнима.

Доказательство.

T_0 содержит лишь кончное число аксиом вида $c \neq \bar{n}_1, \dots, c \neq \bar{n}_k$. Интерпретируем константу c в стандартной модели как любое число $m > n_1, \dots, n_k$.

По теореме о компактности существует (нормальная) модель $M \vDash T$. Модель M обладает следующими свойствами:

- $\mathbb{N}$ изоморфна начальному сегменту M; вложение $\mathbb{N} \to M$ задаётся функцией $\varphi : n \longmapsto \bar{n}_M$.
- $M \vDash Th(\mathbb{N})$;
- $M \ncong \mathbb{N}$, в частности $c_M \in M$ есть «бесконечно большое число», поскольку c_M отлично от всякого $n \in \mathbb{N}$.

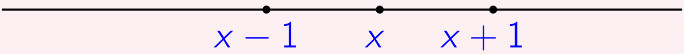


Порядок на модели M

Формула $a < b \rightleftharpoons \exists x\,(x \neq 0 \wedge a + x = b)$ определяет порядок в $\mathbb{N}$. Для данной формулы в $\mathbb{N}$ выполнены аксиомы строгого линейного порядка и следующие предложения:

- $\forall x\,(0 < x \vee 0 = x)$;
- $\forall x \exists y\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to z = x \vee z < x))$;
- $\forall y\,(y \neq 0 \to \exists x\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to$
  $\to z = x \vee z < x)))$.

Следовательно, те же аксиомы выполнены и в M. Поэтому предикат $<_M$ на M представляет собой строгий линейный порядок с наименьшим элементом 0. При этом каждый элемент имеет последователя, и каждый элемент, кроме 0, имеет непосредственного предшественника.



Опр.

Элементы $x, y \in M$ *близки*, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $y = SS \ldots S(x)$ или $x = SS \ldots S(y)$ (n символов S).

Классы эквивалентности по отношению близости называем *галактиками*.

Утверждение.

Если G — галактика в M, $G \neq \mathbb{N}$, то порядок $(G, <_M)$ изоморфен $(\mathbb{Z}, <)$.

Пусть $\mathcal{G}$ есть множество всех галактик в M. Определим $G_1 <_M G_2$, если для любых $x \in G_1$, $y \in G_2$ $x <_M y$.

Теорема.

Порядок $(\mathcal{G}, <_M)$ *есть плотный порядок без наибольшего элемента и с наименьшим элементом* $\mathbb{N}$*.*

Доказательство.

Если $G_1 < G_2$, возьмём чётные $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$ и рассмотрим $y = (x_1 + x_2)/2$ (функция $g(x) = x/2$ определима в $\mathbb{N}$, а значит и в M).

Если $y \in G_1$, то $(x_1 + x_2)/2 = x_1 + \bar{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $2x_1 + 2\bar{n} = x_1 + x_2$, откуда $x_1 + 2\bar{n} = x_2$, то есть $x_2 \in G_1$.

Аналогично показываем $y \notin G_2$.

Пусть St_Σ — множество предложений сигнатуры Σ

Опр.

Элементарная теория модели M есть множество $Th(M) \rightleftharpoons \{A \in St_\Sigma : M \models A\}$.

Элементарная эквивалентность

Опр.

Модели M и N сигнатуры Σ *элементарно эквивалентны* ($M \equiv N$), если в M и в N истинны одни и те же предложения Σ, т.е. если $Th(M) \equiv Th(N)$.

Утверждение.

$M \cong N$ влечёт $M \equiv N$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Подмодели

Опр.

$(N;\Sigma)$ есть *подмодель* модели $(M;\Sigma)$, если $N \subseteq M$ и для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$, $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ имеем $P_N = P_M \upharpoonright N$, $c_M \in N$, N замкнуто относительно f_M и $f_N = f_M \upharpoonright N$.

Пример.

Если $(G;\cdot,1,x^{-1})$ — группа, то подмодели G суть подгруппы группы G. Если же G рассматривается как модель $(G;\cdot,1)$, то её подмоделями будут подполугруппы с единицей группы G.

Элементарные подмодели

Опр.

Подмодель $(N;\Sigma)$ модели $(M;\Sigma)$ *элементарна* (обозначение $N \preccurlyeq M$), если для всех $A \in \mathrm{Fm}_\Sigma$

$$\forall \vec{x} \in N\,(N \vDash A[\vec{x}] \iff M \vDash A[\vec{x}]).$$

Утверждение.

$N \preccurlyeq M$ *влечёт* $N \equiv M$.

Пример.

Если M — нестандартная модель $Th(\mathbb{N})$, то $\mathbb{N} \preccurlyeq M$.

Теорема Лёвенгейма–Сколема

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема.

Всякая модель $(M; \Sigma)$ *имеет (конечную или) счётную элементарную подмодель.*

Следствие.

Всякая непротиворечивая теория в счётной сигнатуре имеет (конечную или) счётную модель.

Следствия

- Существуют счётные модели $Th(\mathbb{R})$ и $Th(\mathbb{C})$.
- Существует счётная модель элементарной геометрии.
- Если теория множеств ZFC непротиворечива, то существует и счётная модель ZFC.

Доказательство.

Построим последовательность счётных подмножеств M $\quad N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$
такую, что

- N_0 — непустое счётное подмножество M.
- Для каждой формулы $A[a, \vec{b}]$ и набора $\vec{y} \in N_k$, если $M \vDash \exists v A[v, \vec{y}]$ выберем $x \in M$ такой, что $M \vDash A[x, \vec{y}]$. Добавим все такие x к N_k и получим N_{k+1}.

Положим $N \rightleftharpoons \bigcup_{k \geq 0} N_k$.

Лемма.
Для любой формулы A и всех $\vec{y} \in N$

$$M \vDash \exists v A[v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \quad M \vDash A[x, \vec{y}].$$

Лемма.
N есть подмодель M.

Доказательство.
Пусть $\vec{x} \in N$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$. Поскольку $M \vDash \exists v\, f(\vec{x}) = v$, имеем $y \in N$ такой, что $M \vDash f(\vec{x}) = y$, т.е. $f_M(\vec{x}) \in N$.

Индукцией по построению A теперь покажем

$$\forall \vec{y} \in N \, (N \vDash A[\vec{y}] \iff M \vDash A[\vec{y}]).$$

- Для атомарных формул A следует из того, что N — подмодель M.
- Для $A = \neg B,\ B \wedge C,\ B \vee C$ вытекает из предположения индукции.
- Допустим $A = \exists v B[a/v]$. Тогда

$$M \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \ \ M \vDash B[x, \vec{y}]$$
$$\iff \exists x \in N \ \ N \vDash B[x, \vec{y}] \iff N \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}].$$

Обобщение о понижении мощности

Теорема.

Пусть $(M; \Sigma)$ *— бесконечная модель в счётной сигнатуре и* $\lambda \leq |M|$ *— бесконечная мощность. Тогда найдётся подмодель* $N \preccurlyeq M$ *такая, что* $|N| = \lambda$.

Доказательство.

Та же конструкция, но начинаем с любого подмножества $N_0 \subseteq M$ мощности λ.

Теорема Лёвенгейма–Сколема о повышении мощности

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема.

Для любой бесконечной модели $(M; \Sigma)$ *и мощности* $\lambda \geq |M|$ *найдётся модель* $(N; \Sigma)$ *такая, что* $M \preccurlyeq N$ *и* $|N| = \lambda$.

Доказательство.

Возьмём $X \supseteq M$, $|X| = \lambda$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma_X \rightleftharpoons \Sigma \cup \{\underline{c} : c \in X\}$ и теорию $T := Th(M; \Sigma_X) \cup \{\underline{c} \neq \underline{d} : c, d \in X, c \neq d\}$.

Каждая конечная подтеория T совместна. По теореме о компактности T имеет нормальную модель N. Но функция $\varphi : c \longmapsto (\underline{c})_N$ инъективна в силу аксиом T, следовательно $|N| \geq |X| = \lambda$. Т.к. $N \vDash Th(M; \Sigma_X)$, то $\varphi(M)$ есть подмодель N, изоморфная M и $\varphi(M) \preccurlyeq N$.

Следствие.

Если теория T имеет бесконечную модель, то T имеет модели любой бесконечной мощности.

Следствие.

Множество $Th(\mathbb{N})$ всех предложений истинных в стандартной модели арифметики имеет модели любой бесконечной мощности.