Введение в математическую логику

Лекция 3

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

`lbekl@yandex.ru`

25.02.2010

Исчисление высказываний

Аксиомы:

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
3. $A \wedge B \to A, \quad A \wedge B \to B$,
4. $A \to (B \to A \wedge B)$,
5. $A \to A \vee B, \quad B \to A \vee B$,
6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
8. $\neg\neg A \to A$.

Правило вывода (*modus ponens*):

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \; (MP).$$

Опр.

Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из некоторых предыдущих формул по правилу вывода.

Правило вывода (*modus ponens*):

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \ (MP).$$

Опр.

Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из некоторых предыдущих формул по правилу вывода.

Пример.

$P \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P))$

$(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \to Q \vee P$ (MP)

Пример.

$P \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P))$

$(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \to Q \vee P$ (MP)

Пример.

$P \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P))$

$(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \to Q \vee P$ (MP)

Пример.

$P \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P))$

$(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \to Q \vee P$ (MP)

Пример.

$P \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$Q \to Q \vee P$ (аксиома 5)

$(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P))$

$(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)$ (MP)

$P \vee Q \to Q \vee P$ (MP)

Опр.

Формула A называется *выводимой* в исчислении высказываний или *теоремой* исчисления высказываний (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A.

Пример.

$\vdash P \vee Q \to Q \vee P$.

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \qquad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \qquad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \qquad (\mathrm{MP})$$

$$A \to (A \to A) \qquad (1)$$

$$A \to A \qquad (\mathrm{MP})$$

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \quad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (\mathrm{MP})$$

$$A \to (A \to A) \quad (1)$$

$$A \to A \quad (\mathrm{MP})$$

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \quad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (MP)$$

$$A \to (A \to A) \quad (1)$$

$$A \to A \quad (MP)$$

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \quad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (\mathrm{MP})$$

$$A \to (A \to A) \quad (1)$$

$$A \to A \quad (\mathrm{MP})$$

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \quad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (\mathrm{MP})$$

$$A \to (A \to A) \quad (1)$$

$$A \to A \quad (\mathrm{MP})$$

Пример.

$\vdash A \to A$.

Доказательство.

В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \quad (2)$$

$$A \to ((A \to A) \to A) \quad (1)$$

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \quad (\mathrm{MP})$$

$$A \to (A \to A) \quad (1)$$

$$A \to A \quad (\mathrm{MP})$$

Выводимость из гипотез

Опр.

Пусть Γ — некоторое множество формул, называемых *гипотезами*.

Выводом из Γ называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ, либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по правилу вывода.

Пример.

Вывод из множества гипотез $\{P \wedge Q\}$:

$P \wedge Q$	(гипотеза)
$P \wedge Q \to P$	
P	(MP)
$P \wedge Q \to Q$	
Q	(MP)
$Q \to (P \to Q \wedge P)$	
$P \to Q \wedge P$	(MP)
$Q \wedge P$	(MP)

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул* Γ (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ, в котором последняя формула есть A.

Замечание.

Вместо $\{B_1, \ldots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \ldots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул* Γ (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ, в котором последняя формула есть A.

Замечание.

Вместо $\{B_1, \ldots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \ldots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Опр.

Формула A называется *выводимой из множества формул* Γ (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ, в котором последняя формула есть A.

Замечание.

Вместо $\{B_1, \ldots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \ldots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример.

$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$.

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*компактность*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$ (*транзитивность*).

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*компактность*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$ (*транзитивность*).

Свойства выводимости из гипотез

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*компактность*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$ (*транзитивность*).

Корректность исчисления высказываний

Предложение.

Всякая выводимая формула является тавтологией.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы A.

Предложение.

Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \models A$.

Корректность исчисления высказываний

Предложение.
Всякая выводимая формула является тавтологией.

Доказательство.
Индукция по длине вывода формулы A.

Предложение.
Если $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \models A$.

Теорема о дедукции для исчисления высказываний

Теорема.

Если $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Упрощает построение выводов в исчислении высказываний.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ, то:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & (1) \\ A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \to A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ, то:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & (1) \\ A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \to A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ, то:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & (1) \\ A \to B & (\mathrm{MP}) \end{array}$$

Если $B = A$, то используем вывод $A \to A$.

Пусть B получена из C и $C \to B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \to C)$ и $\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) \quad (2)$$

$$(A \to C) \to (A \to B) \quad (\mathrm{MP})$$

$$A \to B \quad (\mathrm{MP})$$

Пусть B получена из C и $C \to B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \to C)$ и $\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) \quad (2)$$

$$(A \to C) \to (A \to B) \quad \text{(MP)}$$

$$A \to B \quad \text{(MP)}$$

Пусть B получена из C и $C \to B$ по modus ponens.

Имеем $\Gamma \vdash (A \to C)$ и $\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) \quad (2)$$

$$(A \to C) \to (A \to B) \quad \text{(MP)}$$

$$A \to B \quad \text{(MP)}$$

Замечание.

Вместо $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ обычно пишут $\Gamma, A \vdash B$.

Следствие.

$\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B$

Полезные выводимые правила

Пример.

(*силлогизм*) $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

Доказательство.

Дважды по правилу modus ponens выводим

$$A, A \to B, B \to C \vdash C.$$

Применяем теорему о дедукции.

Полезные выводимые правила

Пример.
(*силлогизм*) $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

Доказательство.
Дважды по правилу modus ponens выводим

$$A, A \to B, B \to C \vdash C.$$

Применяем теорему о дедукции.

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$A \to B$$

$$\neg B$$

$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$

$$(A \to \neg B) \to \neg A \qquad \text{(MP)}$$

$$\neg B \to (A \to \neg B)$$

$$A \to \neg B \qquad \text{(MP)}$$

$$\neg A \qquad \text{(MP)}$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$A \to B$	
$\neg B$	
$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	
$(A \to \neg B) \to \neg A$	(MP)
$\neg B \to (A \to \neg B)$	
$A \to \neg B$	(MP)
$\neg A$	(MP)

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP)}
\end{array}$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$
\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$
\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$A \to B$$
$$\neg B$$
$$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$$
$$(A \to \neg B) \to \neg A \qquad \text{(MP)}$$
$$\neg B \to (A \to \neg B)$$
$$A \to \neg B \qquad \text{(MP)}$$
$$\neg A \qquad \text{(MP)}$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$
\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$A \to B$	
$\neg B$	
$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	
$(A \to \neg B) \to \neg A$	(MP)
$\neg B \to (A \to \neg B)$	
$A \to \neg B$	(MP)
$\neg A$	(MP)

Пример.

(*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство.

Достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$.

$$
\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP)}
\end{array}
$$

Пример.

(*ex falso*) $A, \neg A \vdash B$.

ex falso sequitur quodlibet (лат.) «из ложного следует всё, что угодно»

Доказательство.

Выводим, опираясь на аксиомы 1 (дважды), 7 и 8:

$$A, \neg A \vdash \neg B \to A, \neg B \to \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B.$$

Пример.

(*ex falso*) $A, \neg A \vdash B$.

ex falso sequitur quodlibet (лат.) «из ложного следует всё, что угодно»

Доказательство.

Выводим, опираясь на аксиомы 1 (дважды), 7 и 8:

$$A, \neg A \vdash \neg B \to A, \neg B \to \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B.$$

Непротиворечивые множества формул

Опр.

Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

В противном случае Γ называется *непротиворечивым*.

Замечание.
Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B в силу выводимости $A, \neg A \vdash B$.

Замечание.
Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Замечание.
Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B в силу выводимости $A, \neg A \vdash B$.

Замечание.
Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Лемма.
$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff$ $\Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Возьмём B в качестве A.

$(\Rightarrow)$ Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \to A, B \to \neg A$. По аксиоме $(B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Лемма.
$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff$ $\Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Возьмём B в качестве A.

$(\Rightarrow)$ Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \to A, B \to \neg A$. По аксиоме $(B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Лемма.
$\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство.
$(\Leftarrow)$ Возьмём B в качестве A.

$(\Rightarrow)$ Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \to A, B \to \neg A$. По аксиоме $(B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
  $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \rightleftharpoons \{A : f(A) = И\}$ — максимальное непротиворечивое.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
  $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \rightleftharpoons \{A : f(A) = И\}$ — максимальное непротиворечивое.