# Введение в математическую логику

Лекция 6

Некоторые определения и обозначения. Множество замкнутых формул (в какой-то сигнатуре) мы называем *теорией* или *системой аксиом.*

Если $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — структура с сигнатурой $\Sigma$, а $\Phi$ — замкнутая формула в той же сигнатуре, то $M \vDash \Phi$ означет, что формула $\Phi$ истинна в $M$.

Если формула $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ содержит свободные переменные, а $a_0, \ldots, a_k \in D$, то $M \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k)$ означает, что $\Phi$ истинна в $M$, если вместо переменных $x_i$ подставлены элементы $a_i$. (Более формально: значение формулы $\Phi$ на любой бесконечной последовательности из $D^\omega$, начинающейся с $a_0, \ldots, a_k$, равно 1 (истине), см. Лекцию 4.)

Напомним, что структура $M$ является моделью теории $\Gamma$, если $M \vDash \Phi$ для любой формулы $\Phi \in \Gamma$.

Мы скажем, что замкнутая формула $\Phi$ *семантически следует* из теории $\Gamma$, если формула $\Phi$ истинна в любой модели теории $\Gamma$. Несмотря на некоторую двусмысленность, мы будем обозначать семантическое следование аналогичным выражением: $\Gamma \vDash \Phi$.

Теории, у которых нет моделей, называются *противоречивыми.*

Особенный интерес представляют *полные* теории: теории $\Gamma$, в которых для любой замкнутой формулы $\Phi$ в той же сигнатуре выполнено $\Gamma \vDash \Phi$ или $\Gamma \vDash \neg\Phi$. Если теория $\Gamma$ полна, то для любой замкнутой формулы $\Phi$ или теория $\Gamma \cup \{\Phi\}$, или теория $\Gamma \cup \{\neg\Phi\}$ противоречива.

Пример теории:

$\Gamma_0$: Равенство

Сигнатура: имя двуместного отношения $=$

$(\forall u(u = u))$

$(\forall u, v((u = v) \to (v = u)))$

$(\forall u, v, w((u = v) \wedge (v = w) \to (u = w)))$

Мы позволяем себе вольность речи, записывая $a = b$ вместо $=(a, b)$, $a \neq b$ вместо $\neg =(a, b)$ и пр.

Теория $\Gamma_0$ непротиворечива: моделью этой теории является любое множество с обычным отношением равенства (элемент считается равным только самому себе). Теория не полна: например, формула $(\exists u, v(u \neq v))$ ложна в одноэлементном множестве, и выполнена в любой модели, в которой есть хотя бы два различных элемента.

Теория $\Gamma$ называется *теорией с равенством*, если
(1) $\Gamma$ содержит три указанные выше аксиомы и
(2) для каждого имени $(k+1)$-местного отношения $P$, входящего в сигнатуру теории $\Gamma$, имеется аксиома

$$(\forall u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k (u_0 = v_0 \wedge \dots \wedge u_k = v_k \rightarrow \\ \rightarrow P(u_0, \dots, u_k) \equiv P(v_0, \dots, v_k))),$$

для каждого имени $(k+1)$-местной функции $f$, входящего в сигнатуру теории $\Gamma$, имеется аксиома

$$(\forall u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_k (u_0 = v_0 \wedge \dots \wedge u_k = v_k \rightarrow \\ \rightarrow f(u_0, \dots, u_k) = f(v_0, \dots, v_k))).$$

Модель $M$ теории с равенством называется *нормальной*, если имени $=$ сопоставляется обычное равенство.

*Начиная с этого момента и до конца лекции мы рассматриваем только теории с равенством и только нормальные модели.* Причём это соглашение настолько постоянно, что, описывая теорию, мы не выписываем вышеприведенные аксиомы, относящиеся к равенству, а считаем, что они присутствуют по умолчанию. Аналогично, говоря "модель" мы имеем в виду нормальную модель.

Данное ограничение имеет чисто технический характер. Нетрудно понять, что любую структуру можно заменить "эквивалентной" нормальной структурой.

А именно, пусть $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — модель теории $\Gamma$ с равенством, двуместное отношение $R$, равное $\mathbf{Зн}(=)$, не совпадает с равенством. Первые три аксиомы равенства гарантируют, что $R$ — отношение эквивалентности на $D$. Пусть $\mathbb{D}$ — множество классов эквивалентности множества $D$ по $R$. Рассмотрим структуру $M' = \langle \mathbb{D}, \Sigma, \mathbf{Зн}' \rangle$, определив сопоставление $\mathbf{Зн}'$ следующим образом:

$$\mathbf{Зн}'(P)(A_0, \dots, A_k) = 1 \iff \mathbf{Зн}(P)(a_0, \dots, a_k) = 1 \quad \text{для некоторых } a_i \in A_i,$$

$$\mathbf{Зн}'(f)(A_0, \dots, A_k) = B \iff \mathbf{Зн}(f)(a_0, \dots, a_k) = b \quad \text{для некоторых } a_i \in A_i,\ b \in B,$$

имена предметов мы считаем именами нульместных функций.

Докажите, что: (1) определение корректно, (2) $M'$ — нормальная структура, (3) для любой формулы $\Phi(x_0, \dots, x_k)$ выполнено

$$M' \vDash \Phi(A_0, \dots, A_k) \iff M \vDash \Phi(a_0, \dots, a_k), \quad a_i \in A_i.$$

Для доказательства (3) используйте индукцию по построению формулы: для атомных формул утверждение очевидно из определения $\mathbf{Зн}'$; если утверждение верно для формул $\Phi$ и $\Psi$, то оно верно и для $\neg\Phi, (\Phi\tau\Psi), (\exists u(\Phi[x/u])), (\forall u(\Phi[x/u]))$, где $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$.

Примеры теорий:

$\Gamma_1$: Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

Сигнатура: имя двуместного отношения $<$

$(\forall u\ \neg(u < u))$

$(\forall u, v((u < v) \vee (v < u) \vee (u = v)))$

$(\forall u, v, w(((u < v) \wedge (v < w)) \to (u < w)))$

$(\forall u, v(u < v \to (\exists w((u < w) \wedge (w < v)))))$

$(\forall u(\exists v, w((v < u) \wedge (u < w))))$

Теория непротиворечива — модели: $\mathbb{R}$ (действительные числа), $\mathbb{Q}$ (рациональные числа), $\mathbb{Q}^+$ (положительные рациональные числа).

Полнота. Сразу не удаётся привести пример замкнутой формулы, истинной в одних моделях и ложной в других. Вопрос о полноте отложен.

$\Gamma_2$: Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом.

Сигнатура: имя двуместного отношения $<$, имя предмета 0.

Первые три аксиомы те же, что и в плотном порядке.

Следующие три аксиомы:

$(\forall u((u = 0) \vee (0 < u)))$

$(\forall u(\exists v((u < v) \wedge (\forall w((u < w) \to (v = w) \vee (v < w))))))$

$(\forall u(u \neq 0 \to (\exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))))$

Теория непротиворечива — модели: $\mathbb{N}$ (натуральные числа) и чётные натуральные числа. Вопрос о полноте отложен.

Пары примеров $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{N}$, чётные натуральные числа — "нечестные", так как это пары изоморфных структур. Известно, что $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$ изоморфны: любое конечное монотонно возрастающее отображение $\psi\colon a_i \mapsto b_i$ из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}^+$ может быть продолжено до изоморфизма (так называемый "челночный метод": мы выбираем новый элемент в $\mathbb{Q}$ и ставим ему в соответствие подходящий элемент в $\mathbb{Q}^+$, берём новый элемент в $\mathbb{Q}^+$ и находим для него подходящий прообраз в $\mathbb{Q}$, и так далее — вам должен быть известен этот метод).

Определение. Две структуры $M_1$ и $M_2$ с одной и той же сигнатурой *элементарно эквивалентны* ($M_1 \equiv M_2$), если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

Ясно, что элементарно эквивалентные структуры являются моделями одних и тех же теорий. С другой стороны, очевидно, что изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

Если мы назовём *теорией структуры* $M$ (обозначение — $\mathrm{Th}(M)$) множество замкнутых формул, истинных в структуре $M$, то элементарная эквивалентность структур $M_1$ и $M_2$ означает, что $\mathrm{Th}(M_1) = \mathrm{Th}(M_2)$.

Тривиальное замечание: теория $\mathrm{Th}(M)$ всегда непротиворечива и полна.

Уже упоминавшийся изоморфизм структур опишем более формально. Пусть имеются структуры $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \mathbf{Зн}_2 \rangle$ и взаимно однозначное отображение $\psi\colon D_1 \to D_2$. Это отображение называется изоморфизмом структур, если для каждого имени $(k+1)$-местного отношения $P$, входящего в сигнатуру $\Sigma$, для любых $a_0, \ldots, a_k \in D_1$

$$\mathbf{Зн}_1(P)(a_0, \ldots, a_k) \iff \mathbf{Зн}_2(P)(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)),$$

и для каждого имени $(k+1)$-местной функции $f$, входящего в сигнатуру $\Sigma$, для любых $a_0, \ldots, a_k \in D_1$

$$\psi(\mathbf{Зн}_1(f)(a_0, \ldots, a_k)) = \mathbf{Зн}_2(f)(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)).$$

(Имена предметов мы считаем именами нульместных функций.)

Докажите (индукцией по построению формулы) достаточно очевидное утверждение: для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ со свободными переменными $x_0, \ldots, x_k$ (в частности, свободных переменных может не быть, $\Phi$ — замкнутая) и любых $a_0, \ldots, a_k \in D_1$ выполнено

$$M_1 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \models \Phi(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)),$$

и, таким образом, изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

Изоморфизм описывает очень важный случай элементарно эквивалентных структур, но этот случай достаточно тривиален. Можно вместо изоморфизмов рассмотреть гомоморфизмы, то есть отказаться от отображения *на*. При гомоморфизме $\psi\colon M_1 \to M_2$ образ $\psi(M_1)$ будет *подструктурой* структуры $M_2$: соответствующее подмножество содержит значения всех имен предметов и замкнуто относительно всех значений имен функций (в $M_2$). В случае гомоморфизма мы скажем, что $M_1$ *вложима в* $M_2$.

Обычно теории подструктуры и структуры существенно отличаются: $\left\langle \mathbb{N}, \{<\}, \mathbf{Зн}_{\mathbb{N}} \right\rangle$ и $\left\langle \mathbb{Q}, \{<\}, \mathbf{Зн}_{\mathbb{Q}} \right\rangle$.

Особый интерес представляют *элементарные* подструктуры. А именно, подструктура $M_1$ структуры $M_2$ является элементарной, если для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ и любых элементов $a_0, \ldots, a_k \in M_1$ выполнено

$$M_1 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k).$$

Структуру $M_2$ мы будем называть *элементарным расширением* структуры $M_1$. Ясно, что если одна структура является элементарным расширением другой, то структуры элементарно эквивалентны. Обратное неверно: натуральные числа с порядком и чётные числа с порядком (например, формула $\exists u((x_0 < u) \wedge (u < x_1))$ при $x_0 = 6$, $x_1 = 8$ истинна на натуральных числах, но ложна в структуре чётных чисел).

Существует простой критерий элементарности подструктуры. А именно, *подструктура $M_1$ структуры $M_2$ является элементарной тогда и только тогда, когда для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k, y)$ и любых элементов $a_0, \ldots, a_k \in M_1$ если*
*$M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M_2$, то*
*$M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1$.*

Удобство этого критерия состоит в том, что вопрос об элементарности подструктуры сводится к истинности формул лишь в одной (большей) структуре.

Например, чтобы воспользоваться этим критерием для доказательства неэлементарности подструктуры чётных чисел с порядком в структуре натуральных чисел с порядком, достаточно предъявить в качестве $\Phi(x_0, x_1, y)$ формулу $((x_0 < y) \wedge (y < x_1))$, а в качестве $a_0$ и $a_1$ — чётные числа 6 и 8 ($\in M_1$). Тогда существует такое натуральное $b$ ($b \in M_2$), что $M_2 \vDash \Phi(6, 8, b)$, но не существует чётного $b'$ ($b' \in M_1$), для которого $M_2 \vDash \Phi(6, 8, b')$.

*Доказательство.* В одну сторону утверждение очевидно. Пусть $M_2$ — элементарное расширение $M_1$. Тогда $\big(M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M_2\big) \Rightarrow \big(M_2 \vDash (\exists u \Phi(a_0, \ldots, a_k, u))\big)$ $\Rightarrow$(элементарное расширение) $\big(M_1 \vDash (\exists u \Phi(a_0, \ldots, a_k, u))\big) \Rightarrow \big(M_1 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1\big)$ $\Rightarrow$(элементарное расширение) $\big(M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')\big)$.

Для доказательства в обратную сторону мы должны показать, что

$$M_1 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k)$$

для любой формулы $\Phi$ и для любых $a_0, \ldots, a_k \in M_1$.

Индукцией по построению формулы. Для атомарных формул очевидно, поскольку $M_1$ — подструктура. Если формула не начинается с квантора, то очевидно по индукции, и критерий не используется. Достаточно рассмотреть случай $\Phi = (\exists u \Psi(x_0, \ldots, x_k, u))$, поскольку случай $\Phi = (\forall u \Psi(x_0, \ldots, x_k, u))$ сводится к

$$M_1 \nvDash (\exists u \neg \Psi(a_0, \ldots, a_k, u)) \iff M_2 \nvDash (\exists u \neg \Psi(a_0, \ldots, a_k, u)).$$

Пусть $M_1 \vDash (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$. Тогда $M_1 \vDash \Psi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1$ $\Rightarrow$(индукция) $M_2 \vDash \Psi(a_0, \ldots, a_k, b') \Rightarrow M_2 \vDash (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$ (мы не использовали условий критерия).
Пусть $M_2 \vDash (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$. Тогда $M_2 \vDash \Psi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M_2$ $\Rightarrow$(критерий) $M_2 \vDash \Psi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1$ $\Rightarrow$(индукция) $M_1 \vDash \Psi(a_0, \ldots, a_k, b') \Rightarrow M_1 \vDash (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$. $\square$

***Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели.*** *Любая бесконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подмодель.*

*Доказательство.* Мы построим счётную цепочку $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ счётных подмножеств структуры $M$. Объединение элементов этой цепочки будет искомой элементарной подструктурой. Множество $M_0$ — произвольное счётное множество, содержащее все элементы, соответствующие именам предметов. Пусть $M_i$ уже построено. Построение $M_{i+1}$ состоит из двух шагов:

(1) для каждой функции $f(x_0, \ldots, x_k)$, соответствующей функциональному символу, и для всех $a_0, \ldots, a_k \in M_i$ мы добавляем в $M_{i+1}$ элемент $f(a_0, \ldots, a_k)$.

(2) для каждой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k, y)$ и для всех $a_1, \ldots, a_k \in M_i$, если $M \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M$, мы добавляем в $M_{i+1}$ один из таких элементов.

На каждом шаге мы добавляем не более, чем счётное множество элементов. Шаг (1) гарантирует, что $\cup M_i$ будет подструктурой (будет замкнуто относительно применения функций), шаг (2) — элементарной (используем критерий). $\square$

Обобщение на несчётные сигнатуры: если мощность бесконечной сигнатуры $\alpha$, то на каждом шаге мы добавляем не более $\alpha$ элементов, поэтому построенная подмодель будет иметь мощность не более $\alpha$.

Напомним, что через $\Gamma_1$ мы обозначили теорию плотного линейного порядка без первого и последнего элемента.

*Теория* $\Gamma_1$ *полна.*

*Доказательство.*
(1) Все модели теории $\Gamma_1$ бесконечны.

(2) Любые две счетные модели изоморфны.

(3) Если $\varphi$ — замкнутая формула и теория $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ непротиворечива, то имеется счётная модель этой теории.

Пункт (1) очевиден, пункт (2) доказывается так же, как изоморфизм $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^+$ — всё, что необходимо для построения изоморфизма, гарантируется аксиомами $\Gamma_1$, пункт (3) — теорема Лёвенгейма – Сколема. Поэтому, если $\Gamma_1$ не полна, то найдутся счётные модели для $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\}$ для некоторой замкнутой формулы $\varphi$, что невозможно. $\square$

Теория *категорична* в счётной мощности — все модели счётной мощности изоморфны.

Категоричность в произвольной мощности определяется аналогично.

Обобщая предыдущие рассуждения, мы получаем

***Признак Лося – Воота.*** *Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в счётной мощности, полна.*

Имеет место и обобщение этого признака:

*Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.*

Однако, для того, чтобы обосновать это обобщение, нам нужно научиться расширять структуры, строить структуры большой мощности.

Для этого нам потребуется

***Теорема компактности.*** *Если любое конечное подмножество теории непротиворечиво, то теория непротиворечива.*

Мы сегодня не будем обсуждать доказательство этой важной теоремы, мы поговорим об этой теореме позже.

Займемся расширением структур.

Возьмем бесконечную структуру $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн}\rangle$. Расширим сигнатуру $\Sigma$ до сигнатуры $\Sigma_M$, добавив для каждого элемента $a \in D$ имя предмета $c_a$, естественно продолжим сопоставление $\mathbf{Зн}$ до $\mathbf{Зн}'$ так, что $\mathbf{Зн}'(c_a) = a$.

Пусть $\mathrm{Th}_M(M)$ — теория соответствующей структуры. Если $M'$ — модель теории $\mathrm{Th}_M(M)$, то $M$ элементарно вложима в $M'$: элемент $a \in M$ отображается в элемент из $M'$, сопоставленный имени $c_a$. Обратно, любое элементарное расширение структуры $M$ является моделью теории $\mathrm{Th}_M(M)$ — нужно каждому имени предмета $c_a$ сопоставить элемент $a$.

Ещё раз расширим сигнатуру, добавив новые имена предметов $\{d_i\}$ — множество новых имен может быть большим, например несчётным. Рассмотрим теорию $\Gamma = \mathrm{Th}_M(M) \cup \{d_i \neq d_j | i \neq j\}$. По теореме компактности теория $\Gamma$ непротиворечива. Действительно, любое конечное подмножество $\Gamma$ непротиворечиво: в него входит конечное число новых имен предметов $d_i$, поэтому моделью конечного подмножества является просто структура $M$, если в ней сопоставить новым именам любые неравные между собой элементы (напомним, что $M$ бесконечна).

Если множество $\{d_i\}$ бесконечно, то любая модель теории $\Gamma$ будет содержать не менее $\{d_i\}$ элементов и будет являться элементарным расширением структуры $M$. Если мы хотим получить модель в точности мощности несчётного множества $\{d_i\}$, то следует воспользоваться обобщением теоремы Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели.

Итак, доказана

***Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении.*** *Для любой бесконечной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное расширение сколь угодно большой мощности.*

Приемы, использованные в предыдущем доказательстве, полезны в различных ситуациях.

Пусть $\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, <, +, \times\}, \mathbf{Зн}_0\rangle$ — натуральный ряд с естественным соответствием $\mathbf{Зн}_0$.

Пусть $c$ — новое имя предмета, рассмотрим теорию $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) \cup \{c \neq i \mid i \in N\}$. По теореме компактности, повторив предыдущие рассуждения, мы видим, что она непротиворечива. Модели этой теории называются *нестандартными арифметиками.*

Пусть $\mathbb{N}^*$ — нестандартная арифметика, $N^* = \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ — нестандартные числа.

Простые замечания:

имени $c$ сопоставлено нестандартное число ($\in N^*$),

$\mathbb{N}^* \vDash i < c$ для $i \in N$,

$\mathbb{N}^* \vDash i < c \pm j$ для $i, j \in N$.