Введение в математическую логику

Проф. Алексей Львович Семенов

Введение

Цель – ответить на **вопросы**:

- Что значит, что математическое утверждение доказуемо?
- Что значит, что математическая функция вычислима?

Давид Гильберт, 23.01.1862 — 14.02.1943

Геометрия, 1899

Проблемы Гильберта

II Международный математический конгресс, Париж, 1900

Ответы:

Готлоб Фреге, Давид Гильберт и др.: Математическое доказательство (как деятельность) – получение цепочек символов по математически определенным правилам.

Математическое доказательство (как объект) – цепочка формул, построенная по данным правилам.

Эта система правил будет предъявлена.

Ответы:
Алан Тьюринг, Алонзо Черч, Эмиль Пост и др.

Вычислимая функция - функция, аргументами и результатами которой являются цепочки символов (бывают и обобщения), для которой существует ее формальное задание (построенное по некоторым правилам).

Эта система правил будет предъявлена.

Программа Гильберта обоснования математики

Курт Гедель – построения возможности и доказательства невозможности

1. Исчисления

Исчисление – система формальных правил, разрешающих действия.

1.1 Алфавит, буква, слово, язык

Терминология: Математический язык – объект изучения математической логики. Естественные языки, языки программирования…

Определение 1.1. Алфавит – любое непустое множество. Его элементы – *символы* (*буквы*).

Определение 1.2. *Слово (цепочка)* в алфавите Σ – конечная последовательность элементов Σ.
Язык в алфавите Σ – любое множество слов в алфавите Σ.

Примеры 1.3. $baaa$ – слово в алфавите $\Sigma = \{a,b,c\}$.

386 – слово в алфавите десятичных цифр $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Определение 1.4. Слово, не содержащее ни одного символа, называется *пустым словом* и обозначается Λ.

Определение 1.5. *Длина* слова w – $|w|$, число символов в w (число членов последовательности).

Определение 1.6. x и y — слова в алфавите Σ , слово xy – это результат *приписывания* слова y в конце слова x.

Определение 1.7. v *входит* в w, если $w = uvs$ для некоторых u, s
$u * v * s$ – *вхождение* слова v в слово w , где $uvs = w$
первое вхождение и т.п.

Обозначение 1.8. Если *x* – слово, а *n* – натуральное число, то через x^n обозначаем результат последовательного приписывания *n* копий слова *x*, x^0 – это пустое слово.

Пример 1.9. $ba^3 = baaa$ и $(ba)^3 = bababa$.

1.2. Грамматики

Определение 1.10. Грамматика Γ – это набор $\langle \Sigma, \Omega, \Pi, S \rangle$, где:

Σ – *основной алфавит* Γ

Ω - *вспомогательный алфавит* Γ

$\Sigma \cap \Omega = \varnothing$, $\Delta = \Sigma \cup \Omega$ *алфавит* Γ

Π – конечное множество слов вида $u \to v$ правил *правил* Γ, здесь $\to \notin \Delta$

S – *начальный символ* Γ, $S \in \Omega$

Применить $u \to v$ к слову w в алфавите Δ значит из $w = tus$ получить слово tvs.

Вывод в Γ конечная последовательность слов в алфавите Δ, где каждое следующее слово получается из предыдущего применением некоторого правила из Π, при этом первое слово вывода есть символ S, а последнее не содержит символов из Ω.

Слово *выводимо* в грамматике, если существует вывод, где оно последнее (*его вывод*). Язык всех выводимых слов – *язык, порождаемый грамматикой*.

Примеры грамматик

Как породить все цепочки из 0 и 1? – $\Gamma = \langle \Sigma, \Omega, \Pi, S \rangle$,

Основной алфавит $\Sigma = \{0, 1\}$

Вспомогательный алфавит $\Omega = \{S\}$

$\Pi = \{S \to S0,\ \ S \to S1,\ \ S \to \Lambda\}$

Пример вывода: $S \to S0 \to S10 \to S010 \to S0010 \to 0010$.

Задача. Как породить все десятичные числа?
Пример числа: -3.141592

Задача. Что делает грамматика с основным алфавитом $\{a\}$, вспомогательным $\{S, B, M, E\}$ и правилами

$\Pi = \{S \to BaE, B \to BM,\ Ma \to aaM, ME \to E, B \to \Lambda, E \to \Lambda\}$?

Задача. Как породить все слова, состоящие из одинакового количества букв a и b?

Задача. Построить язык, который породить нельзя.

Имена

До этого мы занимались *синтаксисом* – правилами построения слов. Но помимо синтаксиса у языков бывает и *семантика* – значение слов.

• Значение имени π обычно – действительное число: отношение длины окружности к ее диаметру, иногда – функция, дающая число простых чисел, не превосходящих аргумента функции.

• Значением имени $+$ часто считается сложение действительных чисел.

• Для того, чтобы давать имена словам естественного языка, можно использовать кавычки. Например, значением имени «слон» является слово: слон.

- Можно считать, что значением имени 23 является число 23, существующее в мире математических объектов, можно считать, что значением имени 23 является оно само.
- Значением имени 2+4 является число 6.
- Задание значений имен часто называется *интерпретацией (этих имен).*

Область интерпретации.

- значения имен предметов (объектов) – берутся из области,
- значения имен функций: функции на области.

1.3. Термы

Синтаксис

- Имена без интерпретации
- Алфавит имен предметов Ob={a_0, a_1, a_2,… }
- Алфавит имен функций Fun={f_0, f_1, f_2,… }, для которых известна их арность (число аргументов). (Иногда предметы считаются функциями с нулем аргументов – 0-арными.)
- Упорядоченный алфавит предметных переменных Var= <x_0, x_1, x_2,… >

Определение терма.

1. Имя предмета – терм.
2. Переменная – терм.
3. Если f – имя n-арной функции и t_0, t_1,…, t_{n-1} – термы, то f (t_0, t_1,…t_{n-1}) – терм.

Пример:

- $f_4\ (f_1\ (a_1,\ f_2(a_5, f_4(x_2)),\ x_2))$

Индуктивное определение

Где индуктивное определение в грамматике?

«Слово может быть термом только по одной из трех указанных причин.»
«Множество термов – это наименьшее множество, удовлетворяющее трем указанным условиям.»…

Термы. Семантика

Как и какую терм задает функцию?

Определение Интерпретации <*M*, Зн>

Область *M*

Для каждого имени предмета задано его значение – элемент *M.*

Для каждого имени функции с некоторой арностью задано ее значение – функция с такой же арностью (числом аргументов).

Зн: $\mathrm{Ob} \cup \mathrm{Fun} \rightarrow M \cup P(M^2) \cup P(M^3) \cup \ldots$

Возьмем бесконечную последовательность элементов из *M*: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Множество бесконечных последовательностей элементов из *M обозначим* M^{ω}.

Возьмем α_0, α_1, α_2,... из M^{ω}.

Найдем значение всех термов на этой последовательности.

Индукция по построению:

1. Значение имени предмета есть этот предмет.
2. Значением переменной x_i является α_i.
3. Значением терма f (t_0, t_1,…,t_{n-1}) является результат применения значения имени f к значениям термов, стоящих в скобках.

Функция $M^{\omega} \to M$

Функция, задаваемая термом

- $M^{\omega} \to M$.
- Однозначно ли определено значение функции?
- Можно ли «собирать» функцию по-разному?
- Однозначный анализ: что это значит и как доказать?

1.4. Общее понятие исчисления.

Примеры исчислений:

- Грамматики – языки, порождаемые грамматиками
- Исчисление термов – множество термов (с конечными алфавитами), порождаемые индуктивными определениями…
- Исчисления математических (и других формализуемых) человеческих рассуждений
- Исчисления в компьютерных системах
- Общее понятие исчисления – как системы правил, разрешающих выполнять действия со словами.
- Породимые множества

Всякое породимое множество порождается некоторой грамматикой. («Тезис Гильберта» - условно, в курсе)

Содержание лекции:

- Введение. Цели
- Слова
- Грамматики
- Термы. Индуктивные определения. Синтаксис и семантика
- Общее понятие исчисления. Тезис Гильберта

"Просеминар по математической логике"
в следующую пятницу
18 февраля, в 16:45,
ауд. 16-22.