Введение в математическую логику

Лекция 12

Равномощность

- Множества x и y *равномощны* ($Sm(x, y)$), если существует взаимно однозначная функция, отображающая x на y, то есть $\exists f\ (IFunc(f) \wedge x = Dom(f) \wedge y = Ra(f))$.
- $Sm(x, y)$ – отношение эквивалентности.

Для любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.

- Д. Следует из теоремы Цермело и теоремы о вложении полных порядков.

Теорема Кантора — Бернштейна

Т. Если множество a равномощно подмножеству множества b и множество b равномощно подмножеству множества a, то a равномощно b.

Д. Рассмотрим произвольный полный порядок на a, пусть
I_a — наименьший начальный отрезок a, равномощный a,
I_b — наименьший начальный отрезок a, равномощный b.

Если $I_a = I_b$, то a и b равномощны. Пусть $I_a \neq I_b$.

• Пусть $I_a \subset I_b$. По условию I_b равномощно некоторому подмножеству отрезка I_a. По следствию теоремы о вложении полных порядков это подмножество изоморфно (и, тем более, равномощно) начальному отрезку множества I_a, что противоречит выбору I_b.

• Случай $I_b \subset I_a$ аналогичен.

(Возможно доказательство без Аксиомы выбора.)

Теорема Кантора

Множество x не равномощно P(*x*).

Д. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая x на $P(x)$.

- Пусть $a = \{y \mid y \in x \land y \notin f(y)\}$. Должно найтись такое $z \in x$, что $a = f(z)$.
- Если $z \in a$, то $z \notin f(z) = a$.
- Если $z \notin a = f(z)$, то $z \in a$.

Противоречие.

Возможна ли счетная модель теории множеств?

- Теорема Левенгейма – Сколема
- Отображения? Не все «внешние» отображения оказываются «внутренними».

Первая проблема Гильберта

Гипотеза континуума:

- Между мощностью натурального ряда и мощностью множества всех подмножеств натурального ряда нет промежуточных.

Возможность математики

Математика содержит **ZF**.

1. Математика противоречива, в ней выводится $A \wedge \neg A$. Тогда в ней выводится все что угодно: $A \wedge \neg A \rightarrow B$ – тавтология.

2. Математика непротиворечива и это можно математически доказать, пользуясь особо надежными рассуждениями. Это невозможно (Гедель).

Непротиворечивость расширений теории множеств

- Если теория множеств непротиворечива, то к ней можно добавлять континуум гипотезу или ее отрицание и аксиому выбора или ее отрицание, и она не станет противоречивой.

- Возможность добавления аксиомы выбора и континуум-гипотезы – Гедель, 1940.
- Возможность добавления отрицаний (недоказуемость Аксиомы выбора и Гипотезы континуума) – Коэн, 1963 (форсинг), Вопенка, 1965 (булевозначные модели).
- Независимость…

Парадокс Банаха – Тарского

- Шар можно разбить на пять частей, передвинув которые можно сложить (без пустот и пересечений) два шара такого же радиуса.

Детерминированность игр

Игра Банаха – Мазура (на отрезке [0; 1]*)*

• Два игрока. *A* – множество выигрыша для первого.

Поочередно выбирают отрезки $S_{n+1} \subseteq S_n$.

• Первый выигрывает, если в пересечении всех отрезков найдется точка из *A.*

• В противном случае выигрывает второй.

• Стратегия. Выигрышная стратегия.

• Аксиома детерминированности игр. Во всякой игре Банаха – Мазура один из игроков имеет выигрышную стратегию.

• Из **АС** вытекает отрицание аксиомы детерминированности игр.

Независимость аксиомы бесконечности от других аксиом ZFC

- Идея доказательства.
- Пусть f – отображение класса натуральных чисел N, удовлетворяющее индуктивным соотношениям:
- $f(0) = \varnothing$; $f(n + 1) = f(n) \cup P(f(n))$.
- Тогда:
- $f(1) = \{\varnothing\}$, $f(2) = \{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$…
- Класс $\cup \{f(n) \mid n \in N\}$ является

моделью **ZF** без аксиомы бесконечности.

Другие расширения

- Обобщенная континуум-гипотеза