Введение в математическую логику

Лекция 14

Модальные логики

Язык:

В индуктивное определение формулы логики высказываний добавляется еще одна возможность:

- если A — формула, то $\square A$ — тоже формула (читается «необходимо A»).

Символ $\lozenge$ вводится как сокращение для

$\neg\square\neg$, то есть

$\lozenge A$ — *это* $\neg\square\neg A$ («возможно A»).

Содержательная интерпретация

Возможные содержательные интерпретации выражения $\Box A$:

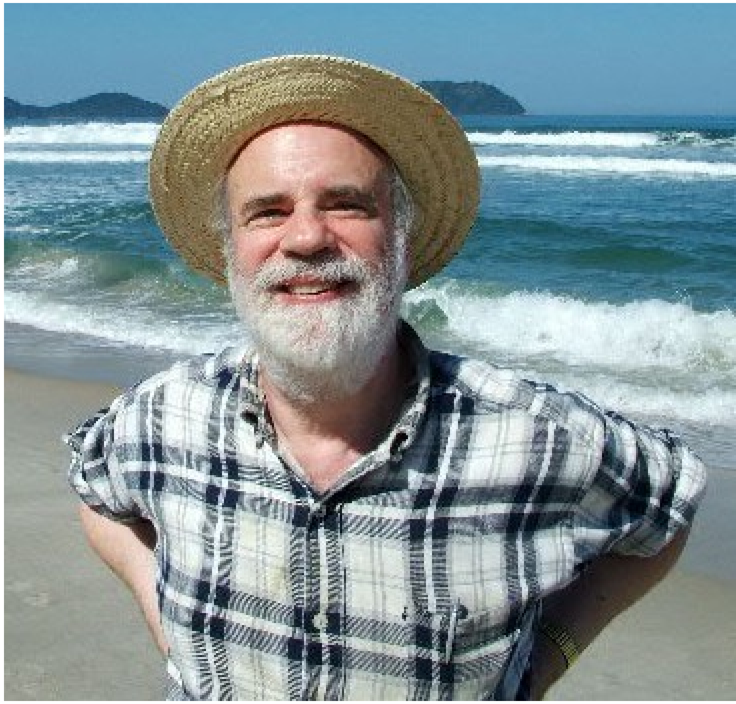
- Необходимо *A*
- Всегда *A*
- Должно быть *A*
- Известно, что *A*
- Считается, что *A*
- Утверждение *A* доказуемо (в данной теории)
- После завершения программы выполнено *A*

Другие модальности:

- желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно… Вероятностные логики, нечеткие логики, квантовые логики

Семантика. Сол Крипке (1958)

- *Шкалой Крипке* называется пара $F = \langle S;R \rangle$, где S — произвольное непустое множество ”миров”, $R \subseteq S \times S$ — произвольное отношение ”достижимости” (одного «мира» из другого).



Модальная логика. Истинность

Φ — упорядоченный алфавит логических переменных,
V — бесконечная последовательность подмножеств множества S.

Отношение ***F,s,V*** $\vDash$ ***A:"формула A выполнена в мире s*** **(*s*** $\in$ ***S*) *шкалы F на последовательности V"*.**

Индуктивное определение. Все случаи – как в логике высказываний, кроме:

- $F,s,V \vDash p$ для переменных p определяется как $s \in V(p)$ ($V(p)$ – это множество миров, в которых p истинна).
- $F,s,V \vDash \Box A$ определяется как $F,t,V \vDash A$ для всех t таких, что $R(s, t)$ (во всех достижимых мирах).

Формула A ***истинна в шкале*** F ($F \vDash A$), если она истинна в любом мире этой шкалы на любой последовательности

Модальная логика. Исчисление

Замечание (о семантике):

$F \vDash A \;\Rightarrow\; F \vDash \Box A$ и

$F \vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ для любых $F; A; B$.

Исчисление К (Крипке):

- система аксиом, в которую входят все частные случаи тавтологий исчисления высказываний и все формулы:

$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

- правила вывода:

$$\frac{A\,;\,A \to B}{B}$$ (modus ponens),

$$\frac{A}{\Box A}$$ (необходимость).

Подстановка формул вместо переменных

Истинность формул, выводимых в К

- любая формула, выводимая в *K*, истинна в любой шкале Крипке.
- **Индукция по определению выводимости (построению вывода).**

Выводимость в К истинных формул

Д. *Каноническая* шкала $M^K = (S^K; R^K)$.

- Элементы S^K – непротиворечивые максимальные (т.е. содержащие для любой формулы или ее саму, или ее отрицание, и замкнутые относительно правил вывода) множества формул.
- $R^K(s;t) \Leftrightarrow \{A \mid \square A \in s\} \subseteq t$.

Возьмем в качестве $V^K(p) = \{s \mid p \in s\}$.

Замечание. Любое непротиворечивое множество формул можно как-то расширить до непротиворечивого максимального (перебирая в подряд все формулы и замыкая по выводимости).

Утверждение 1.

Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \iff (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$

Пусть $\Box A \in s$. Из $R^K(s;t)$ по определению

$R^K(s; t) \iff \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$

получаем, что $A \in t$.

***Утверждение 1.* Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A**

$\square A \in s \Leftrightarrow (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

Доказательство. ($\Leftarrow$)

$U = \{B \mid \square B \in s\}$. Тогда $U \cup \{\neg A\}$ противоречиво.

- Иначе расширим $U \cup \{\neg A\}$ до максимального t,

$U \subseteq t$, t достижимо из s. Значит $A \in t$. Противоречие.

- В U есть $B_0,\ldots,B_n$, для которых $K \vdash \neg(B_0 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A)$,

в логике высказываний $K \vdash B_0 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$,

$K \vdash B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots)$.

$K \vdash \square(B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots)$ (необходимость).

Используя аксиому $\square(A \to B) \to (\square A \to \square B)$ и (MP),

получаем $K \vdash (\square B_0 \to (\square B_1 \to (\ldots(\square B_n \to \square A)\ldots)$.

- Поскольку $\square B_0, \square B_1,\ldots, \square B_n \in s$ и s замкнуто относительно

выводимости, то $\square A \in s$.

***Утверждение 2.* Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A**

$$\boldsymbol{M^K, s, V^K \vDash A \iff A \in s .}$$

Д. Индукция по построению формулы.

Для атомных формул – определение V^K.

Истинность $p \iff s \in V^K(p) = \{s \mid p \in s\} \iff p \in s$.

Для связок логики высказываний получается с использованием максимальности s и замкнутости s относительно выводимости:

- Истинность $\neg A$ эквивалентна не-истинности A, эквивалентна не-принадлежности A к s,

эквивалентна принадлежности $\neg A$ к s.

- Истинность импликации означает ложность посылки или истинность заключения…

Для необходимости – Утверждение 1.

Утверждение 3. $M^K \models A \Leftrightarrow K \vdash A$ (M^K – определяющая шкала)

Д. Пусть A – истинна. Если A не выводима, то множество $\{\neg A\}$ – непротиворечиво, и его можно расширить до некоторого s, не содержащего A. Противоречие с Утверждением 2.

Теорема полноты для К. **Формула *А* выводима в логике *К* тогда и только тогда, когда она истинна в любой шкале Крипке.**

Полнота исчисления предикатов.

Примеры других аксиом и классов шкал

- *K* является минимальной логикой, определяемой классом шкал Крипке.

- *Логика «предсказуемого завтра»*: $SL = K \cup \{\Box A \equiv \Diamond A\}$.
- Условие на шкалы: $\forall s\, \exists! t R(s; t)$.
- Определяющая шкала: $(N;R)$; $R(s;t) \Leftrightarrow t = s + 1$.

- *Логика универсальной модальности (”всегда”, ”всюду”)*:
- $S5 = K \cup \{\Box A \to A;\ \Box A \to \Box\Box A;\ \Diamond\Box A \to A\}$.
- Условие на шкалы: отношение достижимости рефлексивно, транзитивно и симметрично.
- Определяющая шкала: $(N;R)$; $R = N \times N$.

- *Логика «неопределенного завтра»*: $D = K \cup \{\Box A \to \Diamond A\}$.
- Условие на шкалы: $\forall s\, \exists t\, R(s; t)$.
- Определяющая шкала: $(N;R)$, где N — слова в алфавите N; $R(s; t) \Leftrightarrow |t| = |s| + 1$ и t — продолжение s.

Неожиданный экзамен

- В субботу преподаватель объявил, что на следующей неделе будет экзамен, но накануне экзамена студенты не будут знать, когда он будет.
- Вывод: «Экзамена не будет».
- Экзамен состоялся в среду.

Идея немонотонной логики

- Дополнительная информация может уменьшать множество доказуемых утверждений.
- Оплата клетки для птицы.
- Логика простейших объяснений.
- Логика незнания.
- Логика веры.

Спасибо!