Введение в математическую логику

Лекция 3

Универсальный алгоритм
(для нормальных алгорифмов)

Упорядочим алфавит алгоритмов Маркова:

0, 1, $\rightarrow$, $\bullet$, A_1, A_2, . . .

Закодируем все правила алгоритма в двоичном алфавите.

Программа алгоритма – двоичный код набора всех правил (или соответствующее число).

Универсальный алгоритм по программе p всякого алгоритма Маркова Φ и исходному данному выдает результат применений Φ к этому данному.

Универсальный алгоритм может быть реализован как алгоритм Маркова! (Это утверждение становится правдоподобным по мере приобретения навыков в составлении алгоритмов Маркова и составляет важную часть книги А. А. Маркова «Теория алгорифмов».)

Универсальная функция *U (p, x)* для всякого алгоритма Φ с программой *p* и слова *x* дает результат применения Φ к *x*.

Диагональ (конечная)

№чл.посл. / № посл.	0	1	2	3	4
0	1	2	8	2	3
1	0	3	7	3	5
2	7	6	0	3	9
3	8	2	7	5	8
4	3	0	6	5	0

В таблице конечное число конечных последовательностей.

Как построить последовательность, которой нет в этой таблице?

Самый простой способ: взять диагональ и испортить её в каждом члене.

Например, прибавляем 1 и получаем 24161.

Диагональ несчетности (Кантора)

№ цифры / № посл.	0	1	2	3	4
0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	1	1
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0

……………..

В таблице бесконечное число бесконечных последовательностей.
Как построить последовательность, которой нет в этой таблице?
Способ Кантора: взять диагональ и испортить её в каждом члене.
Например, получаем: 00101 . . .

Диагональ невычислимости

Аргум. x / Программа	0	1	2	3	4
0	1	2		4	
1		4		3	
2	5		0		6
3		7			4
4		9			3

Таблица универсальной функции *U(p,x)*

Стоки таблицы – все вычислимые функции.

Не все клетки заполнены, так как не всегда функция определена.

Функция *U(n,n)+1* (от одного аргумента) – вычислима!

Пусть *V(n)* – продолжение функции *U(n,n)+1* на все числа (например, доопределяем нулем).

Есть ли последовательность 25104. . . в таблице?

V(n) не вычислима (как и любое продолжение до всюду определенной).

Область определения *U(n,n)* – перечислима и неразрешима.

Логика высказываний

Логика высказываний. Синтаксис.

Логические имена (логические значения):

0 (Л, Ложь, F), 1 (И, Истина, T) .

Упорядоченный (бесконечный) алфавит логических переменных: $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Логические связки:

$\neg$ - отрицание, не

$\wedge$ - конъюнкция, «и»

$\vee$ - дизъюнкция, «или»

$\rightarrow$ - импликация, «влечет», «если…, то…»

$\equiv$ - эквивалентность, «равносильно»

Индуктивное определение формулы:

- Логические имена, логические переменные – формулы.
- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$,

то $(\neg\Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.

Сокращения. Опускание скобок.

- Будем опускать внешние скобки.
- Формулу $(\neg A_i)$ будем записывать $\neg A_i$.
- Старшинство операций и т. д.
- $\neg A_1 \vee A_2$ – это сокращение для $((\neg A_1) \vee A_2)$.
- Можно восстановить

Логика высказываний

- Логика высказываний. Семантика.
- ***B*** = {0,1}.
- Семантика связок: операции над высказываниями

A	B	$\neg$A	A$\wedge$B	A$\vee$B	A$\rightarrow$B	A$\equiv$B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Названия и содержательный смысл. Примеры и трудности естественного языка.

- Разделительное ИЛИ
- Союз И
- Парадоксы импликации

Логика высказываний

- Логика высказываний. Семантика.
- Фиксируем бесконечную последовательность $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $\alpha_i \in \boldsymbol{B} = \{0,1\}$.

Значение формулы на данной последовательности. ***Индукция по построению:***

1. Значением логического имени является оно само.
2. Значением логической переменной A_i является α_i .
3. Значением формулы $(\Phi\tau\Psi)$, где $\tau \in \{\to, \wedge, \vee, \equiv\}$,

является результат применения операции τ к значениям формул Φ, Ψ.

Значением формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения формулы Φ, т.е. Зн Φ = 1- Зн Φ.

Однозначность значения – однозначность анализа формулы.

Значение формулы – функция $\boldsymbol{B}^{\omega} \to \boldsymbol{B}$.

Пусть наибольший номер переменной в формуле равен n-1.

Тогда формула задает функцию $\boldsymbol{B}^{n} \to \boldsymbol{B}$.

Таблица функции. Построение функции по формуле

Под каждой логической связкой написано значение соответствующей подформулы. Под главной связкой – значение формулы (красным цветом).

A_1	A_2	A_3	$(A_1 \rightarrow$	$\neg A_2)$	$\wedge$	$\neg (A_3$	$\vee A_1)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Построение формулы по функции

- В длинной конъюнкции и дизъюнкции будем опускать скобки. $\vee\Phi_i$, $\wedge\Phi_i$ аналогично Σa_i, Πa_i.
- Где функция, задаваемая формулой $A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ равна 1?

- Только при значении $<\alpha_0,\alpha_1, \alpha_2,\alpha_3> = <1,0,0,1>$

- Фиксируем натуральное число *n*.

Обозначения $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$,

- $(0, A_i) = \neg A_i$
- $(1, A_i) = A_i$
- $(\alpha, A) = ((\alpha_0, A_0) \wedge (\alpha_1, A_1) \wedge \ldots \wedge(\alpha_{n-1}, A_{n-1}))$

Теорема о дизъюнктивной нормальной форме.

Всякая функция f: $\boldsymbol{B}^n \rightarrow \boldsymbol{B}$ ***з***адается формулой

$\vee(\alpha,A)$, по всем α, для которых $f(\alpha) = 1$.

Д.Н.Ф. (сднф)