Введение в математическую логику

Лекция 4

Логика высказываний

- Построение сложных высказываний из простых
- Для простых – существенна только их истинность.
- О чем высказывания – не существенно и не видно.

Отношения

- Множество *D*
- *n*-местное отношение (*n*-местное свойство, *n*-местный предикат) на *D* – любое подмножество в D^n.
- n-местное отношение – отображение из D^n в {0,1}, высказывание об элементах *D.*
- ω-местное отношение – подмножество в D^ω, где $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- **Пример** – 2-местное отношение равенства – множество всех пар $\langle x,x \rangle$, $x \in D$.

Логика предикатов

Синтаксис 1. Начало

- Алфавит имен предметов $Ob = \{a_0, a_1, a_2, . . . \}$
- Алфавит имен функций $Fun = \{ f_0, f_1, f_2, . . .\}$, каждому имени сопоставлена его арность (число аргументов). (Иногда предметы считаются функциями с нулем аргументов – 0-арными.)
- Алфавит имен отношений $Pr = \{P_0, P_1, P_2, . . .\}$, каждому имени сопоставлена его арность (число аргументов). (Иногда логические имена «Ложь» и «Истина» считаются отношениями с нулем аргументов – 0-арными.)
- Для функции сопоставления арности можно было бы тоже ввести обозначение – А.
- Сигнатура $\Sigma = <Ob, Fun, Pr>$

Логика предикатов

Семантика 1. Начало

- Модель (алгебраическая система) – это набор <*D*, Σ, *Зн*>, где *Зн* сопоставляет имени:
- имени предмета – элемент из *D*,
- имени функции – всюду определенное отображение (операцию) над *D* (с нужным числом аргументов),
- имени отношения – отношение на *D* (с нужным числом аргументов).
- Число мест часто обозначается указанием переменных: $f\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Примеры моделей

Пример 1. Упорядоченное поле рациональных чисел:

$$\left\langle \mathbb{Q}\ , \left\langle \{0, 1\}, \{+, *\}, \{ =, >\} \right\rangle, \mathit{Зн} \right\rangle.$$

Здесь $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел (носитель модели),

$\Sigma = \left\langle \{0, 1\}, \{+, *\}, \{ =, >\} \right\rangle$ - сигнатура, состоящая из двухэлементного алфавита имён предметов Ob={0, 1}, двухэлементного алфавита имён функций Fun = {+, $*$} и двухэлементного алфавита имён отношений Pr = { =, >}. Отображение *Зн* сопоставляет имени 0 рациональное число 0, имени 1 – рациональное число 1, именам + и $*$ – функции сложения и умножения рациональных чисел, а именам = и > – отношения равенства и порядка на множестве рациональных чисел.

Синтаксис. В этом примере вместо привычного 2+3 пишем +(2,3), вместо 5<7 пишем <(5,7), и т. д.

Вопрос. Можно ли включить в сигнатуру операцию взятия обратного в поле?

Примеры моделей

- **Пример 2.** Свободный моноид.
  Носитель модели – множество всех слов в двухбуквенном алфавите {a, b}.
  В сигнатуру включаем единственную операцию над словами – приписывание одного слова к другому, и только один предикатный символ – равенство.
- **Пример 3.** Группа.
  В сигнатуру включаем операцию умножения элементов группы (двухместную) и операцию взятия обратного (одноместную).

Логика предикатов

Синтаксис 2. Продолжение

• Фиксируем упорядоченный алфавит (свободных) предметных переменных $FVar = <x_0, x_1, x_2, \ldots>$.

Термы (индуктивное определение, уже было):

• Имя предмета – терм.

• Переменная – терм.

• Если f – имя n-арной функции, и $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ – термы , то $f(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ – терм.

Атомные формулы

• **Если** P – имя n-арного отношения и $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ – термы, то $P(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ – атомная формула.

Пример построения атомной формулы

- $P_2\Big(f_1\Big(a_1, f_2(f_2(a_5, f_4(x_2)), x_2)\Big)\Big)$ – атомная формула

Как она строилась:

- $a_5, f_4(x_2)$
- $f_2(a_5, f_4(x_2)), x_2$
- $a_1, f_2(f_2(a_5, f_4(x_2)), x_2)$
- $f_1(a_1, f_2(f_2(a_5, f_4(x_2)), x_2))$

Логика предикатов

Семантика 2. Продолжение

- Пусть задана модель: <$D, \Sigma,$ *Зн*>
- *Зн* терма на заданной последовательности $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *из* D^{ω} – элемент D.
- *Зн* терма – функция $D^{\omega} \to D$.
- Считаем, что *Зн* x_i – это α_i .
- *Зн* атомной формулы $P(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ на заданной последовательности из D^{ω} – применяем *Зн* P к *Зн* t_0, *Зн* $t_1, \ldots,$ *Зн* t_{n-1}. Получаем элемент из {0,1}.
- *Зн* атомной формулы – отображение $D^{\omega} \to \{0,1\}$, то есть - ω-местное отношение. Если номера всех переменных меньше n, то получаем n-местное отношение.

Логика предикатов

Синтаксис 3. Продолжение

Связанные переменные

Пример:

- $\sum_{i=1}^{100} \sin(i)$, что значит подставить вместо *i* число 8? *i* - связанная
- Фиксируем упорядоченный *алфавит связанных предметных переменных BVar=* $\langle u_0, u_1, u_2, \dots \rangle$

Кванторы:

- $\forall$ - *квантор всеобщности*, «для всех»
- $\exists$ - *квантор существования*, «существует»

Замена:

A[x/u] означает результат замены всех вхождений символа *x* в слове *A* на символ *u (x не обязан входить в A)*

Логика предикатов

Формула (заданной сигнатуры), индуктивное определение:

- Атомные формулы – формулы.
- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$,
  то $(\neg\Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.
- Если Φ - формула,
  x – свободная переменная ($x \in FVar$),
  u – связанная переменная ($u \in BVar$), не входящая в Φ,

  то $(\forall u\ \Phi[x/u])$, $(\exists u\ \Phi[x/u])$ – формулы

  (в эти формулы *x* не входит).

Сокращения

- Опускание внешних скобок
- Вместо $\forall u\ \forall v$ пишем $\forall u,v$.

Логика предикатов

- **Семантика 3. Продолжение**
- Пусть задана модель: <*D*, Σ, *Зн*>
- *Зн* формулы Φ на заданной последовательности $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *из* D^{ω} определяется индукцией по построению формулы.

- *Зн* атомной формулы $P(t_0, t_1, . . . , t_{n-1})$: применяем *Зн P* к *Зн* t_0, *Зн* t_1, . . . , *Зн* t_{n-1}. Получаем 0 или 1 (уже было сегодня).
- Значением формулы $(\Phi\tau\Psi)$, где $\tau\in\{\to,\wedge,\vee,\equiv\}$, является результат применения операции τ к значениям формул Φ, Ψ.
- Зн $(\neg\Phi)$ = 1- Зн Φ (аналогично логике высказываний).

- *Зн* ($\forall u\ \Phi[x_i/u]$) = 1 $\Leftrightarrow$ для всех последовательностей β, совпадающих с α на всех местах, кроме i–го, выполнено Зн Φ = 1.
- *Зн* ($\exists u\ \Phi[x_i/u]$) = 1 $\Leftrightarrow$ существует последовательность β, совпадающая с α на всех местах, кроме i–го, на которой Зн Φ=1.

Логика предикатов

- Задана модель $M = \langle D, \Sigma, Зн \rangle$.
- Истинность (=1) формулы зависит только от значений ее (свободных) переменных (от соответствующих членов последовательности α).
- Если все свободные переменные Φ имеют номера, меньшие n, то Φ *выражает* n-местное отношение на *D, выразимое* (или *определимое*) *в M.*

Задача изучения свойств (наборов) элементов, выразимых в данной модели

Примеры выразимых свойств

- Рассмотрим модель «натуральные числа с константой 1 и умножением»: $\langle \mathbb{N}, \langle\{1\}, \{*\}, \{=\}\rangle, \mathit{Зн}\rangle$.
- Свойство «x_1 делится на x_2» можно выразить в этой модели с помощью формулы $(\exists u\ (=(*(u, x_2), x_1)))$.
- Свойство «x_1 – простое число» можно выразить формулой $(\forall u_1\ ((\exists u_2(=(*(u_1, u_2), x_1))) \rightarrow ((u_1{=}1)\vee(u_1{=}x_1))))$.

Логика предикатов

- *Замкнутая* формула – это формула без свободных переменных.
- Замкнутая формула либо истинна (*Зн* = 1), либо ложна (*Зн* = 0) в данной модели.
- Модель является *моделью системы замкнутых формул*, если все формулы системы истинны в ней.
- Модель системы аксиом
- Задача изучения свойства модели системы аксиом (пример – теория групп)
- Замкнутая формула (данной сигнатуры) называется *общезначимой,* если она истинна во всех моделях этой сигнатуры.
- Замкнутая формула (данной сигнатуры) называется *выполнимой*, если она истинна хотя бы в одной модели (этой сигнатуры).

Пример общезначимой формулы

Если двухместная функция f задаёт коммутативную операцию, то этот факт может быть выражен формулой

$(\forall u_1 (\forall u_2 (=(f(u_1, u_2), f(u_2, u_1))))).$

Ассоциативность операции выражается формулой

$(\forall u_1 (\forall u_2 (\forall u_3 (=(f(f(u_1, u_2), u_3), f(u_1, f(u_2, u_3))))))).$

Если операция одновременно и коммутативна и ассоциативна, то аргументы можно переставлять и группировать, как угодно. В частности, справедлива такая формула:

$\forall u_1, u_2, u_3, u_4 (f(f(u_1, f(u_2, u_3)), u_4) = f(f(u_4, u_1), f(u_2, u_3)))$

(используем сокращённую запись).

Если теперь первые две формулы записать в посылке импликации, а последнюю – как следствие, то получим общезначимую формулу:

$(\forall u_1, u_2 (f(u_1, u_2) = f(u_2, u_1))) \wedge$

$(\forall u_1, u_2, u_3 (f(f(u_1, u_2), u_3) = f(u_1, f(u_2, u_3)))) \rightarrow$

$\forall u_1 u_2 u_3 u_4 (f(f(u_1, f(u_2, u_3)), u_4) = f(f(u_4, u_1), f(u_2, u_3))).$

Оговорка. Предполагаем при этом, что предикатный символ = интерпретируется как настоящее равенство (совпадение).