Введение в математическую логику

Лекция 7

Теория моделей

- Исходное отношение:
  - Истинность замкнутой формулы в модели
- Сигнатура Σ = <*Ob, Fun, Pr*>
- Ф – замкнутая формула, М – модель
- $M \models \Phi$
- Теория – любое множество замкнутых формул

Соответствие:
Теория класса моделей –
Класс всех моделей теории

Пусть

- m – класс моделей,
- φ – теория.

Определим отображения:

- Th (m) – теория класса моделей m,
- Mod (φ) – класс всех моделей теории φ.

Тогда $m \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Th}(m) \supseteq \varphi$.

То есть:

Th, Mod – соответствие Галуа (анти-монотонное).

Терминология

- «Элементарный» язык, теория, эквивалентность и т. д. – означает отсутствие переменных отношений, функций, и т. д.
- «Язык второго порядка» – есть переменные отношения, функции, и т. д.
- Будем говорить «утверждение» вместо «замкнутая формула» – это короче.

Арифметики

- Сигнатура – < 0, 1, <, +, x >
- Семантика – N, Зн, . . .
- Модель Nat – арифметика
- Th (Nat) – арифметика

Добавим к сигнатуре новую константу *c.*

Теория Th(Nat) $\cup$ {*c*$\neq$0, *c*$\neq$1, *c*$\neq$1+1, *c*$\neq$1+1+1,…} – непротиворечива.

Д. Любая конечная часть этой теории – непротиворечива. (Ее модель – арифметика, а интерпретация *c* – какое-нибудь достаточно большое число.) По теореме компактности (Мальцев) есть модель и у всей теории.

Заметим, что модель новой теории не изоморфна арифметике (в арифметике нет бесконечно больших (больших, чем любая сумма единиц) элементов).

- Можно показать, что у Th (Nat) есть много неизоморфных моделей. Все они называются *нестандартными арифметиками*.

Нестандартные арифметики, как упорядоченные множества

- На нестандартной арифметике имеется порядок $<$, обладающий теми же свойствами (записываемыми утверждениями логики предикатов), что и порядок на Nat.
- Будем через $\underline{i}$ обозначать результат сложения *i* единиц: 1+1+…+1.

Для натуральных *n*

- К *n* можно добавить 1, получится большее число.
- Если *n* не ноль, из него можно вычесть 1, получится меньшее число.
- Между *n* и *n+1* нет чисел.

В нестандартной арифметике, если $b > a$, то или $b = a+\underline{i}$ для некоторого i, или $b - \underline{k} > a+\underline{i}$ для всех $\underline{i}$, $\underline{k}$.

Область нестандартной арифметики разбивается на классы – галактики:

1. Каждая галактика состоит из элементов, отличающихся друг от друга добавлением и вычитанием единиц.
2. Галактика, содержащая 0, как упорядоченное множество изоморфна N. Каждая другая галактика как упорядоченное множество изоморфна целым числам Z.
3. На галактиках есть линейный порядок, изоморфный неотрицательным рациональным числам. Галактика натуральных чисел – наименьшая.

Д (3). Пусть *a* и *b* лежат в разных галактиках, $a < b$. Тогда один из элементов $a+b$ и $a+b+1$ четен, разделим его пополам. Получим элемент, лежащий между *a* и *b*. Он не может лежать в галактиках, в которых лежат *a* и *b*, иначе *a, b* лежали бы в одной галактике. Поэтому порядок на галактиках плотный. Наибольшего элемента нет, поскольку, если $c>$i для всякого натурального i, то $c+c > c+\underline{k}$ для всякого натурального k.

Теории упорядоченных множеств

- Теория всех упорядоченных множеств Γ_0 не полна.
  - Ее модели – все упорядоченные множества.
  - В одних моделях есть наименьший элемент, в других – нет. Утверждение о существовании наименьшего элемента и его отрицание семантически не следуют из Γ_0.
- Теория плотного линейного порядка без первого и последнего элемента (Γ_1) полна.
  - Все ее счетные модели изоморфны.
  - Если бы было утверждение, которое не следует из Γ_1, и его отрицание тоже не следует, то имелись бы две счетные, не изоморфные модели.
- Теория дискретного линейного порядка (Γ_2). Полнота?

Гомоморфизмы

- Сигнатура, две интерпретации
- Отображение
- Сохранение функций и отношений
- Изоморфизм – гомоморфизм, для которого есть обратный:
  - Взаимно-однозначное соответствие (на все и не склеивает)
  - гомоморфизм
- Автоморфизм
  - Изоморфизм модели с ней самой

Выразимые отношения

- «Выразимое отношение сохраняется при автоморфизме»
- Выразим ли порядок через сложение?
- Натуральные числа -
- Целые числа – автоморфизм смены знака

Порядок на рациональных числах

- Сигнатуры, состоящие из отношений, выразимых через порядок.
- Что выразимо? Каковы классы выразимости?
- Порядок
- Равенство
- «Между»: $x<z<y \vee y<z<x$
- «Цикл»: $x<y<z \vee y<z<x \vee z<x<y$
- Для каждой модели имеется своя группа автоморфизмов.
- Рассмотрение автоморфизмов позволяет доказывать различие классов выразимых отношений.
- Какие еще классы могут быть?

Дискретный линейный порядок ($Г_2$)

- [Название отражает не всё содержание аксиом.]
- Операции на линейных порядках (линейно упорядоченных множествах):

  \+ второй порядок следует за первым,

  x располагаем копии первого порядка по второму порядку (сравниваем пары по второй координате, при равных – по первой).
- Мы выяснили, что порядок счетной нестандартной арифметики изоморфен N* = N + Q x Z.
- У $Г_2$ есть счетные неизоморфные модели, например, N и N+Z.
- Эти модели представляют собой N, за которым следуют линейно упорядоченные галактики.
- Отсюда вытекает, что все счетные модели $Г_2$ вкладываются в N*, причем галактики модели целиком переходят в галактики N*, а начальной галактике модели соответствуют натуральные числа в N*.

Дискретный линейный порядок ($Г_2$)

- Автоморфизмы для Z – прибавление или вычитание фиксированного числа, для N + Q x Z – можно действовать аналогично в экземплярах Z.
- Пусть $M \vDash Г_2$. Тогда вложение M в N* элементарно (то есть сохраняет истинность всех формул (в сигнатуре порядка) на элементах из M).

Д. Критерий элементарного вложения сводит вопрос к следующему: Дана формула Ф(*a,y*), где *a* – набор значений из M для переменных *x*, а *y* – свободная переменная. Тогда, если найдется *b*, для которого Ф(*a,b*) – истинна, то такое *b* найдется в M. Напомним, что N* – нестандартная арифметика. Для натуральных чисел верно, что при любых *x* найдется минимальное *y*, при котором Ф(*x,y*) истинна. Значит, соответствующая формула истинна и в N*. У N* есть автоморфизм, тождественный на M и вычитающий 1 во всех галактиках не из M. Этот автоморфизм оставляет на месте *a*, сохраняет истинность Ф(*a,b*). Поэтому минимальное b, при котором Ф(*a,b*) истинна, лежит в M.

- Таким образом, все счетные модели $Г_2$ элементарно эквивалентны N*.
- Теория $Г_2$ – полна.

Выразимость в порядке на натуральных числах

- Формула Ф(x) с одной свободной переменной.
- Модель N+Z элементарно эквивалентна N.
- Сдвиг на 1 в компоненте Z – автоморфизм, значит на второй компоненте Ф постоянна. Значит, верна формула, что начиная с некоторого места Ф истинна, или верна формула, что начиная с некоторого места Ф ложна.
- Значит, на N Ф(x) также постоянна, начиная с некоторого натурального числа, то есть задает конечное множество или дополнение к нему.
- Мы воспользовались автоморфизмом элементарного расширения.
- Как сформулировать и доказать аналогичное утверждение для формул с несколькими свободными переменными?