Введение в математическую логику

Лекция 8

Логика высказываний (напоминание)

- Формулы строятся из логических переменных $A_0, A_1, A_2, \ldots$ с помощью логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ и скобок.
- Для формулы определено её значение (1 – истина, 0 – ложь) на бесконечной последовательности $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots$ (где $\alpha_i \in \mathbf{B} = \{0,1\}$).
- Формула называется тавтологией (или общезначимой), если она истинна на любой последовательности (при подстановке вместо переменных любых значений).
- Примеры тавтологий:

  $A_3 \vee \neg A_3$ (закон исключенного третьего)

  $(A_1 \wedge \neg A_1) \rightarrow A_0$ (из противоречия вытекает все, что угодно)

  $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)) \equiv ((A_1 \wedge A_2) \rightarrow A_3)$

В импликации $A \rightarrow B$ подформула A называется посылкой импликации, а подформула B – заключением.

Частные случаи тавтологий логики высказываний в логике предикатов

- Возьмем тавтологию логики высказываний, например:

  $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$.   (*)
- Подставим в (*) вместо логических переменных A_1 и A_2 любые (замкнутые или незамкнутые) формулы логики предикатов (некоторой заданной сигнатуры):
- Например, вместо A_1 подставим $(\forall u_1(P_5(u_1)))$,

  а вместо A_2 подставим $(\exists u_1(P_4(f_0(u_1),u_1)))$:

  $(\forall u_1(P_5(u_1))) \rightarrow ((\exists u_1(P_4(f_0(u_1),u_1))) \rightarrow (\forall u_1(P_5(u_1))))$.
- То, что получилось, называется *частным случаем тавтологии* (*) логики высказываний в логике предикатов.
- Любая такая формула общезначима (истинна в любой модели и на любой последовательности элементов носителя модели).
- Иногда вместо «частный случай тавтологии…» мы будем говорить просто «тавтология».

Исчисление предикатов

- Фиксируем сигнатуру $\Sigma = <Ob, Fun, Pr>$.
- По заданной сигнатуре однозначно строится исчисление предикатов. Оно задаётся *аксиомами* (являющимися некоторыми формулами сигнатуры Σ) и *правилами вывода*. Вот они (мы опускаем восстановимые скобки):
- Аксиомы:

A1. частные случаи тавтологий логики высказываний,

A2. формулы вида $\forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi[x/t\,]$,

A3. формулы вида $\Phi[x/t\,] \to \exists u\, \Phi[x/u]$,

где Φ – формула, x – свободная переменная ($x\in FVar$), u – связанная переменная ($u\in BVar$), не входящая в Φ, t – терм.

Исчисление предикатов

Правила вывода:

R1 $$\frac{\Phi, \quad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$ (modus ponens, (MP))

R2 $$\frac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to \forall u\, \Psi[x/u]}$$

R3 $$\frac{\Psi \to \Phi}{\exists u\, \Psi[x/u] \to \Phi}$$

Если уже выведены формулы, написанные в верхней части правила, то правило разрешает вывести формулу, написанную внизу.

В R2, R3 x не входит в Φ.

Правила R2 и R3 называются правилами Бернайса.

Исчисление предикатов

Выводом называется последовательность формул, каждая из которых:

• является аксиомой, или

• получается из каких-нибудь предыдущих формул по одному из правил вывода.

Формула Φ называется *выводимой* в исчислении предикатов, или теоремой исчисления предикатов, если существует вывод, содержащий формулу Φ

(обозначение $\vdash \Phi$).

Примеры выводов (в скобках мы даем пояснения, которые в вывод не входят):

Пример 1. (1) $\vdash \forall u\, P(u) \to P(x)$ (аксиома A2)

(2) $\vdash \forall u\, P(u) \to \forall v\, P(v)$ (по правилу R2 из (1))

(В этом выводе P – имя одноместного отношения.)

Исчисление предикатов

Примеры выводов

Пример 2. Пусть Φ – любая конкретная формула в нашей сигнатуре.

(1) $\vdash (\forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi) \to ((\Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]) \to (\forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]))$

(частный случай тавтологии $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

(2) $\vdash \forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi$ (A2, Φ – это $\Phi[\, x/x\,]$)

(3) $\vdash \big(\Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]\big) \to \big(\forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]\big)$

(по R1 из (2) и (1))

(4) $\vdash \Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]$ (A3)

(5) $\vdash \forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]$ (по R1 из (4) и (3))

Исчисление предикатов

Примеры вывода

Пример 3.

(1) $\vdash \forall u\,(u<y) \to x<y$ (A2, терм $t = x$)

(2) $\vdash x<y \to \exists v\,(x<v)$ (A3, терм $t = y$)

(3) $\vdash \big(\forall u\,(u<y) \to x<y\big) \to$

$\to \Big(\big(x<y \to \exists v\,(x<v)\big) \to \big(\forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v)\big)\Big)$ (частный случай тавтологии $(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$)

(4) $\vdash (x<y \to \exists v\,(x<v)) \to (\forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v))$ (по MP из (1) и (3))

(5) $\vdash \forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v)$ (по MP из (2) и (4))

(6) $\vdash \forall u\,(u<y) \to \forall u\,\exists v\,(u<v)$ (по R2 из (5))

(7) $\vdash \exists v\,\forall u\,(u<v) \to \forall u\,\exists v\,(u<v)$ (по R3 из (6))

Заметим, что полученная формула – общезначима.

Корректность исчисления предикатов

Теорема. Всякая выводимая в исчислении предикатов формула является общезначимой.

Структура доказательства (индукция по построению).

- A1 Частные случаи тавтологий логики высказываний – общезначимы.
- A2 Формулы вида $\forall u\, \Phi[x/u] \rightarrow \Phi[\,x/t\,]$ – общезначимы.
- A3 Формулы вида $\Phi[\,x/t\,] \rightarrow \exists u\, \Phi[x/u]$ – общезначимы.
- R1 Если формулы Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$ общезначимы, то формула Ψ – общезначима.
- R2 Если формула $\Phi \rightarrow \Psi$ общезначима и Φ не содержит x, то формула $\Phi \rightarrow \forall u\, \Psi[x/u]$ – общезначима.
- R3 Если формула $\Psi \rightarrow \Phi$ общезначима и Φ не содержит x, то формула $\exists u\, \Psi[x/u] \rightarrow \Phi$ – общезначима.

Доказательство рассматривает определение истинности, значения на последовательности и т. д.

Выводимость в теории

- Теория (или система аксиом) – множество замкнутых формул.
- Замыкание формулы – замкнутая формула, получающаяся навешиванием на данную формулу кванторов всеобщности.
- Часто аксиомы формулируются без начальных кванторов всеобщности, которые подразумеваются.
- Вывод в теории Γ – наравне с аксиомами вида A1, A2, A3 используются формулы из Γ.
- $\Gamma \vdash \Phi$ – формула Φ выводима (доказуема) в теории Γ (является теоремой теории Γ).
- Формула Φ опровержима в теории Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$.
- Формула Φ независима от теории Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.

Вычислимость

- Если система аксиом конечна, или породима, то множество теорем – породимо (перечислимо).
- Разрешимо ли множество теорем?
- Множество общезначимых формул породимо (разрешимость?).

Арифметика Пеано

Аксиомы и теоремы теории групп…

Аксиомы Пеано (замыкания формул)

1. Аксиомы равенства для S, +, $\times$,
2. $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b$,
3. $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b)$,
4. $a \times 0 = 0, \quad a \times S(b) = a \times b + a$,
5. (Схема аксиом индукции)

$$\big(\Phi[x/0] \wedge \forall u(\Phi[x/u] \to \Phi[x/S(u)])\big) \to \forall u \Phi[x/u],$$

для любой формулы Φ.

(У Джузеппе Пеано аксиомы были другие.)

Свойства выводимости

- Монотонность: если $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ и $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Gamma_1 \vdash \Phi$.
- Транзитивность: если имеются две теории Γ_1 и Γ_2, причём в теории Γ_1 выводится каждая аксиома теории Γ_2, а в теории Γ_2, выводится формула Φ, то в теории Γ_1 тоже выводится формула Φ.
- Компактность: если $\Gamma \vdash \Phi$, то существует такое конечное множество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $\Gamma_0 \vdash \Phi$.

Д. Непосредственное рассмотрение выводов.

Эквивалентность теорий

- Пусть Γ_1 и Γ_2 – теории сигнатуры Σ.
- Будем говорить, что теория Γ_1 содержит теорию Γ_2 , и писать $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$, если в Γ_1 выводима каждая формула теории Γ_2.
- Будем говорить, что теории Γ_1 и Γ_2 (дедуктивно) эквивалентны и писать $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$, если $\Gamma_1 \vdash \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \vdash \Gamma_1$.

Теорема дедукции для исчисления предикатов

Пусть Γ – теория, Φ – замкнутая формула.

Тогда $\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi)$ тогда и только тогда,

когда $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$.

Д. Пусть в Γ есть вывод $(\Phi \to \Psi)$, добавим Φ к Γ, он останется выводом, добавим в конце одно применение MP.

Пусть в $\Gamma \cup \{\Phi\}$ есть вывод Ψ. Перестроим его в вывод $(\Phi \to \Psi)$ в Γ. Рассмотрим отдельно все случаи выводимости формулы.

Теорема дедукции для исчисления предикатов

- Ψ - тавтология, тогда $(\Phi \to \Psi)$ – тавтология (сокр. от «частный случай тавтологии логики высказываний»).
- $\Psi = \Phi$, но $(\Phi \to \Phi)$ – тавтология.
- $\Psi = \forall u\, \Theta[x/u] \to \Theta[\,x/t\,]$. $A \to (B \to A)$ – тавтология. Добавим в вывод тавтологию

$(\forall u\, \Theta[x/u] \to \Theta[\,x/t\,]\,) \to (\Phi \to (\forall u\, \Theta[x/u] \to \Theta[\,x/t\,]))$ и

применим MP.

- $\Phi[\,x/t\,] \to \exists u\, \Phi[x/u]$ – аналогично.

Теорема дедукции для исчисления предикатов

- (R1) Если в выводе были формулы Θ и $\Theta \to \Psi$, то в новом выводе оказались (по индуктивному предположению) формулы $(\Phi \to \Theta)$ и $(\Phi \to (\Theta \to \Psi))$.

  Используя подходящую тавтологию и пару раз MP, получаем $\Phi \to \Psi$.
- (R2) Если в выводе была формула $\Theta \to \Psi$ и Θ не содержит *x*, то в новом выводе оказалась формула $\Phi \to (\Theta \to \Psi)$. Используя подходящую тавтологию и MP, можно получить $\Phi\wedge\Theta \to \Psi$ ($\Phi\wedge\Theta$ не содержит x). Отсюда (по R2) $\Phi\wedge\Theta \to \forall u\, \Psi[x/u]$ и, с помощью подходящей тавтологии и MP, получаем

  $\Phi \to (\Theta \to \forall u\, \Psi[x/u])$.
- (R3) – аналогично (R2).

Следствие теоремы о корректности исчисления предикатов

Т. Все теоремы теории Γ истинны в любой модели М теории Γ.

Д. В выводе теоремы использовалось конечное число аксиом. Тогда формула «из конъюнкции этих аксиом следует теорема» общезначима по теореме о дедукции, значит по теореме о корректности она истинна в М. Поскольку посылка истинна, то и заключение истинно.

Непротиворечивость. Существование модели

- (Синтаксическая) непротиворечивость системы аксиом – невозможность вывести противоречие из этой системы. Противоречие – это пара формул Φ и $\neg\Phi$, или их конъюнкция: $\Phi \wedge \neg\Phi$.

Это – синтаксическая понятие.

- Сходное семантическое понятие – существование модели у системы аксиом = совместность = (семантическая) непротиворечивость (этот термин использовался в одной из предыдущих лекций).

Теорема о существовании модели. У всякой синтаксически непротиворечивой системы аксиом существует модель.

Доказательство в данном курсе не приводится в силу его технической сложности.

Таким образом:

Невозможность вывести противоречие из системы аксиом эквивалентно существованию модели у нее.

Теорема компактности для исчисления предикатов.

Пусть Γ – множество замкнутых формул некоторой сигнатуры, и любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда и само множество Γ имеет модель.

Д. Если у теории нет модели, то она синтаксически противоречива. Однако при выводе противоречия используется только конечная часть теории. Значит, противоречива уже эта часть, и у нее не может быть модели. Противоречие.

Полнота исчисления предикатов

Теорема о полноте исчисления предикатов. Если формула истинна во всех моделях теории, то она выводима в этой теории.

Д. Пусть Φ истинна во всех моделях теории Γ. Тогда то же верно для ее замыкания Ψ.

Пусть теория $\{\Gamma, \neg\Psi\}$ – непротиворечива. Тогда у нее существует модель. В этой модели истинны Ψ и $\neg\Psi$, что невозможно.

Значит, теория $\{\Gamma ,\neg\Psi\}$ – противоречива. Тогда в этой теории выводима $\Theta \wedge \neg\Theta$. По теореме о дедукции формула $\neg\Psi\to \Theta \wedge \neg\Theta$ выводима в Γ. Отсюда легко выводится Ψ. А из Ψ легко вывести Φ.

Следствие. Всякая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

Вместе с теоремой корректности получаем, что семантическое свойство общезначимости эквивалентно синтаксическому свойству выводимости.

Следствия теорем корректности и полноты исчисления предикатов

Следствие. Выводимость формулы из системы аксиом эквивалентна ее истинности в любой модели этой системы.

Следствие. Выводимость формулы в исчислении предикатов эквивалентна ее общезначимости.

Предваренная нормальная форма

Для всякой формулы Φ можно построить такую формулу Ψ, что

- $\models (\Phi \equiv \Psi)$,
- все имеющиеся в Ψ кванторы стоят в начале (образуют кванторную приставку).

Формула Ψ называется *предваренной нормальной формой* формулы Φ.

Преобразование данной формулы в предварённую нормальную форму

- Переименованием связанных переменных добиваемся того, чтобы разные кванторные приставки связывали разные переменные.

  Например, формулу

  $\forall u_{\mathbf{1}}(P_{\mathbf{5}}(u_{\mathbf{1}},\mathrm{x})) \to \forall u_{\mathbf{1}}(P_{\mathbf{4}}(u_{\mathbf{1}},\mathrm{y}))$

  преобразуем в эквивалентную ей формулу

  $\forall u_{\mathbf{1}}(P_{\mathbf{5}}(u_{\mathbf{1}},\mathrm{x})) \to \forall u_{\mathbf{2}}(P_{\mathbf{4}}(u_{\mathbf{2}},\mathrm{y}))$.
- Из логических связок оставляем только $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Для этого используем эквивалентности
  $\models ((\Phi \to \Psi) \equiv (\neg \Phi \vee \Psi))$,

  $\models ((\Phi \equiv \Psi) \equiv (\Phi\wedge\Psi \vee \neg\Phi\wedge\neg\Psi))$.

Преобразование данной формулы в предварённую нормальную форму

- Дальнейшие преобразования основаны на следующих эквивалентностях:

  (1) $\vDash (\neg\forall u\, \Phi \equiv \exists u\, (\neg\Phi))$

  (2) $\vDash (\neg\exists u\, \Phi \equiv \forall u\, (\neg\Phi))$

  (3) $\vDash (\Psi \vee \exists u\, \Phi \equiv \exists u\, (\Psi \vee \Phi))$

  (4) $\vDash (\Psi \wedge \exists u\, \Phi \equiv \exists u\, (\Psi \wedge \Phi))$

  (5) $\vDash (\Psi \vee \forall u\, \Phi \equiv \forall u\, (\Psi \vee \Phi))$

  (6) $\vDash (\Psi \wedge \forall u\, \Phi \equiv \forall u\, (\Psi \wedge \Phi))$

- В (3) – (6) Ψ не содержит u, об этом мы позаботились, переименовав (при необходимости) связанные переменные.
- При замене в формуле подформулы на эквивалентную подформулу, получается формула, эквивалентная исходной.
- Преобразования по (1) – (6) не изменяют в формуле количество логических связок и количество кванторных приставок, но перемещают связки внутрь формулы, а кванторные приставки – наружу. Процесс должен закончиться.
- В (3) – (6) при необходимости пользуемся коммутативностью $\vee$ и $\wedge$.