Введение в математическую логику

Лекция 9

Утверждение, которое вы сейчас видите на экране, –

ложно.

Формализация

- Утверждение в формальном языке, говорящее о собственной истинности

Арифметики

Желаемое:

- Арифметика = Настоящие натуральные числа и операции
- Эта Арифметика полностью описывается Аксиомами
- Все свойства натуральных чисел могут быть выведены из Аксиом

Арифметики

Реальность:

- Существует много арифметик, не изоморфных Настоящим натуральным числам (с операциями), но со всеми свойствами натуральных чисел.
  - обсуждалось раньше
- Не существует системы аксиом, из которых могут быть выведены все свойства натуральных чисел (и только они).
  - тема сегодня

Кодирование

- При фиксированной сигнатуре – язык логики предикатов.
- Слова в алфавите языка логики предикатов кодируются в алфавите {0, 1}. Операция Код.
- При необходимости можно кодировать также последовательности слов.

Модель M (вариант арифметики)

Область (носитель) – слова в алфавите {0,1}.

В сигнатуре есть 0,1 и операция приписывания слов, могут быть, кроме этого, +, x и др. Слова в алфавите {0,1} – термы (но могут быть и другие термы).

Выразима функция подстановки (можно обойтись без функций, используя только символы для отношений):

- Подст: Код слова, получаемого подстановкой в формулу, кодом которой является первый аргумент, второго аргумента вместо свободной переменной *x.*

Гёделева диагональ

- Ф – формула с одной свободной переменной
- Г = ¬ Ф (Подст(x,x))
- Г (код Г) = ¬ Ф (Подст (код Г, код Г)) = ¬ Ф (код Г (код Г))

Теорема Тарского. Не существует формулы Ф в заданной сигнатуре, выражающей свойство: «быть кодом истинного в модели М утверждения».

Д. Предположим, такая формула Ф существует.

- **Пусть**: Г (код Г) – истинно. **Тогда**: Ф (код Г (код Г)) – истинно,
  ¬ Ф (код Г (код Г)) – ложно,
  Г (код Г) – ложно.
- **Пусть**: Г (код Г) – ложно. **Тогда**: Ф (код Г (код Г)) – ложно,
  ¬ Ф (код Г (код Г)) – истинно,
  Г (код Г) – истинно.

Гёделева диагональ

- Ф – формула с одной свободной переменной
- Г = ¬ Ф (Подст(x,x))
- Г (код Г) = ¬ Ф (Подст (код Г, код Г)) = ¬ Ф (код Г (код Г))

Пусть в нашей модели М для всякого исчисления над алфавитом {0,1} выразимо свойство «быть кодом выводимого в этом исчислении слова».

Теорема Гёделя. Не существует исчисления, порождающего в точности истинные формулы в нашей модели.

Д. Пусть такое исчисление существует, и Ф выражает свойство «быть кодом выводимого слова».

Пусть: Г (код Г) – истинна. **Тогда**: она выводима.

Ф (код Г (код Г)) – истинно,
¬ Ф (код Г (код Г)) – ложно,
Г (код Г) – ложно.

Пусть: Г (код Г) – ложна. **Тогда**: она не выводима.

Ф (код Г (код Г)) – ложно,
¬ Ф (код Г (код Г)) – истинно,
Г (код Г) – истинно.

Соотношение с обычной арифметикой

- Сигнатура приписывания не менее естественна, чем сигнатура сложения и умножения.
- В рассматриваемой сигнатуре могут быть +, $^{\times}$.
- Подстановка и выводимость («быть кодом выводимой формулы») могут быть выражены через приписывание, а приписывание – через +, $^{\times}$. Приписывание несущественно расширяет арифметику.
- Более богатые теории, например, теория множеств, или теория, где имеется одноместное отношение.

Естественные недоказуемые утверждения

- Важные теоремы и проблемы теории чисел, комбинаторики, математической логики, теории вычислений и т. д. можно формулировать в арифметике
- Постепенно для них удается найти доказательства, решения и т. д.
- Теорема Геделя показывает, что иногда это может быть и не так – возможны утверждения, для которых доказательство или опровержение (в теории Пеано) не будет найдено никогда.

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

Червь Беклемишева

- *Червём* будем называть произвольную конечную последовательность натуральных чисел.
- *Нос* червя – последний элемент последовательности.
- *Голова* червя – максимальный конец последовательности (включая нос), все элементы которого не меньше носа.
- *Хвост* червя – оставшаяся начальная часть последовательности (хвост может быть пустым).
- В примерах голова – красная (нос – тёмно-красный), хвост – зелёный:

(а) 7 6 1 2 3 **4 6 5 4**

(б) 7 6 1 2 3 4 6 3 **4**

(в) **7 6 1 2 3 4 6 3 0 1 0 0 0**

(г) **3 7 6 7 8 9 8 4 6 3 3 4 3**

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

Эволюция червя

- Эволюция червя происходит по шагам. После каждого шага заново определяем, где у червя хвост, голова, нос.
- Если нос равен 0, то отрезаем его, и на следующем шаге последовательность становится на 1 короче.
- Если на (k-1)-м шаге нос не равен 0, то на k-м шаге к голове червя приделываем ещё k копий головы и в каждой из (k+1) копий нос уменьшаем на 1.
- Пример 1:

$w_0 = \mathbf{0}$

$w_1 = \Lambda$

Пример 2:

$w_0 = \mathbf{1}$

$w_1 = \mathbf{0\ 0}$

$w_2 = \mathbf{0}$

$w_3 = \Lambda$

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение
Эволюция червя. Пример 3.

- w_0 = **2**
- w_1 = **1 1**
- w_2 = **1 0 1 0 1 0**
- w_3 = **1 0 1 0 1**
- w_4 = **1 0 1 0 0 0 0 0 0**
- w_5 = **1 0 1 0 0 0 0 0**
- w_6 = **1 0 1 0 0 0 0**
- w_7 = **1 0 1 0 0 0**
- w_8 = **1 0 1 0 0**
- w_9 = **1 0 1 0**
- w_{10}= **1 0 1**
- w_{11}= **1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0**
- . . .

w_{23} = **1 0**

w_{24} = **1**

w_{25} = **0 0**^{25}

. . .

w_{50} = **0**

w_{51} = Λ

Истинное, но не доказуемое в PA утверждение
Эволюция червя. Пример 4.

- w_0 = 3
- w_1 = 2 2
- w_2 = 2 1 2 1 2 1
- w_3 = 212120 212120 212120 212120
- w_4 = 212120 212120 212120 21212
- w_5 = 212120 212120 212120 2121 111111
- w_6 = $(212120)^3\ (2121111110)^7$
- w_7 = $(212120)^3\ (2121111110)^6$ 212111111
- w_8 = $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^9$
- w_9 = $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^8$ 21211111
- w_{10}= $(212120)^3\ (2121111110)^6\ (212111110)^8\ (21211110)^{11}$
- . . .

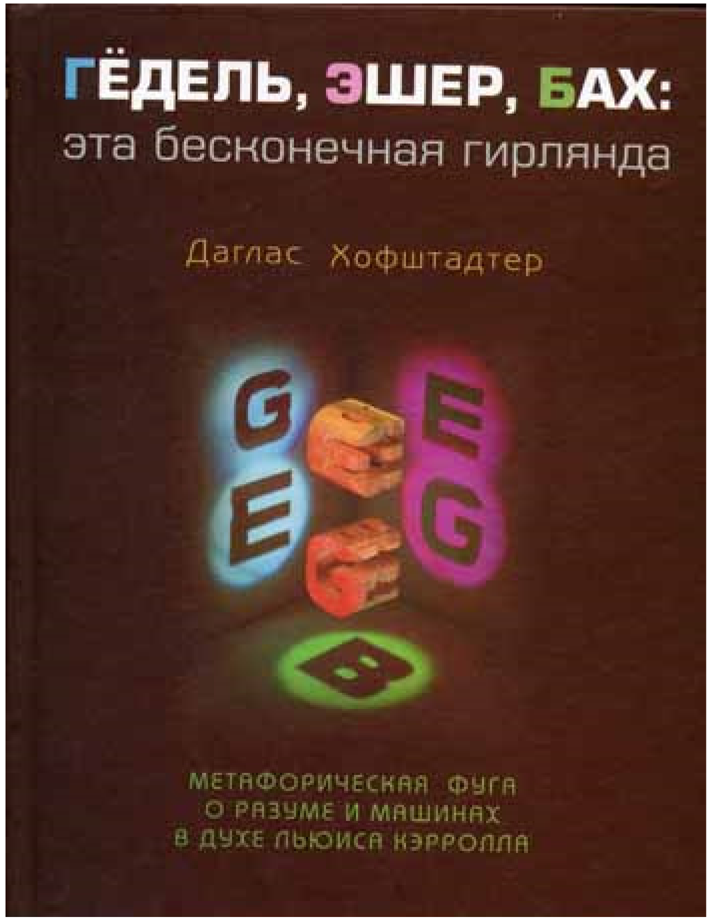
Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

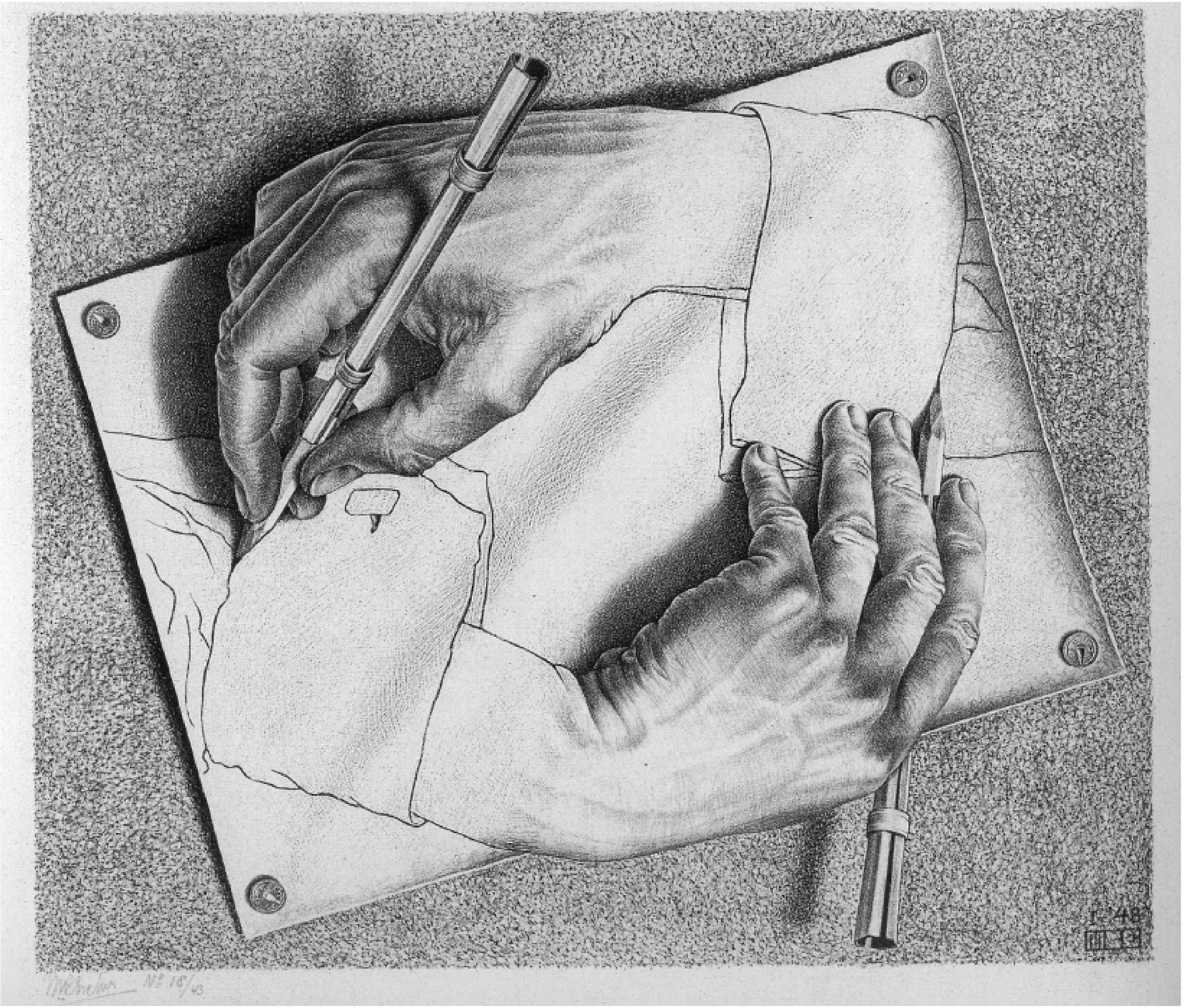
- **Утверждение.** Любой червь в процессе эволюции рано или поздно (но скорее поздно, чем рано) исчезнет (превратится в пустую последовательность).
- **Утверждение.** Предыдущее утверждение истинно, но не доказуемо в арифметике Пеано PA.

Теорема Гёделя

- Пропасть между доказуемостью и истинностью, между математикой и реальностью

В 1999 году
"Time magazine"
провозгласил
Гёделя
самым великим
математиком XX века
и включил его в список
"Ста великих людей
столетия".





http://www.youtube.com/watch?v=j4cYiCq_Hvc