Дополнительные задачи к курсу (осень 2018)
“Введение в математическую логику и теорию алгоритмов”

Лектор: проф. В.Б.Шехтман

Преподаватели: В.Е.Плиско, В.Н.Крупский, Т.Л.Яворская, Е.Е.Золин, С.Л.Кузнецов

Логика высказываний (задачи 1–7 принимаются до 16.10 вкл.!)

(1) **(Бесскобочная запись формул)** Формулы логики высказываний можно записывать так, чтобы они не содержали скобок: вместо $(A \vee B)$ пишем $\vee AB$, вместо $(A \wedge B)$ пишем $\wedge AB$ и т.д. Бесскобочную запись придумал польский логик Ян Лукасевич, поэтому ее называют «польской».

(а) Сформулируйте индуктивное определение формулы в польской записи.

(б) Сформулируйте и докажите лемму об однозначном анализе формул в польской записи.

(2) **(Распознавание формул)** Опишите алгоритм распознавания формул логики высказываний. Он должен преобразовывать входное слово X, составленное из переменных, логических связок и скобок, в «ДА», если X — формула, и в «НЕТ» иначе.

(3) (а) Докажите, что собственное начало формулы не может быть формулой.

(б) Докажите, что собственный конец формулы не может быть формулой, за единственным исключением, когда формула начинается с цепочки отрицаний.

(в) Докажите, что конец формулы не может быть началом другой формулы, за единственным исключением, когда формула начинается с цепочки отрицаний.

(4) **(Компактность)** Множество формул логики высказываний $\Gamma \subseteq Fm$ называется *выполнимым*, если есть оценка переменных, при которой все формулы из Γ истинны.

Докажите **теорему о компактности**: *если каждое конечное подмножество некоторого множества формул* Γ *выполнимо, то и всё множество формул* Γ *выполнимо.*

Указание: пусть $\Gamma = \{A_0, A_1, \ldots\}$. По условию, для каждого n множество $\Delta_n = \{A_0, \ldots, A_n\}$ выполнимо, то есть истинно при некоторой оценке v_n. Постройте из оценок v_n оценку v, при которой истинно всё множество Γ.

(5) **(Логика операций над множествами)** Будем интерпретировать пропозициональные переменные не нулями и единицами, а произвольными подмножествами фиксированного множества $W \neq \varnothing$. Итак, *интерпретацией на* W называем произвольную функцию $I\colon \mathsf{Var} \to 2^W$. Связки $\wedge, \vee, \neg$ трактуем как пересечение, объединение, дополнение (до W). Тем самым каждой формуле A интерпретация I сопоставит некоторое подмножество $I(A) \subseteq W$. Будем говорить, что формула A

– *истинна при интерпретации* I, если $I(A) = W$;

– *общезначима на множестве* W, если A истинна при всех интерпретациях I на W;

– *м-тавтология*, если A общезначима на всех непустых множествах W.

(а) Докажите, что (при любом фиксированном множестве $W \neq \varnothing$) *формула общезначима на множестве* W *тогда и только тогда, когда она есть тавтология.*

Как следствие, (а’) *м-общезначимые формулы совпадают с тавтологиями.*

(б) Будем говорить, что из множества Γ *м-следует* формула A, если для каждого множества W и каждой интерпретации I на W, такой что все формулы из Γ истинны при I, формула A тоже истинна при I.

Докажите, что *из* Γ *м-следует* A *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \models A$.

Здесь $\Gamma \models A$ — логическое следование: при каждой оценке переменных (нулями и единицами), если значения всех формул из Γ равны 1, то значение формулы A равно 1.

Примечание: в решении *не* используйте исчисление высказываний или булевы алгебры.

(6) **(Интерполяционная лемма Крейга)** Если импликация $A \to C$ общезначима, то существует формула B (называемая *интерполянтом* данной импликации), такая что формулы $A \to B$ и $B \to C$ общезначимы и каждая переменная, входящая в B, входит в A и C.

Для удобства считайте, что в языке логики высказываний есть константы $\top$ и $\bot$.

Указание: докажите сначала простой вариант леммы: если формула $A \vee B$ есть тавтология и формулы A и B не имеют общих переменных, то A или B — тавтология.

(7) **(Компактность и лемма Кёнига)**

Лемма Кёнига. *Бесконечное дерево конечного ветвления имеет бесконечную ветвь.*

(а) Докажите теорему о компактности при помощи леммы Кёнига.

Указание: включите в дерево булевы кортежи $(a_1, \ldots, a_n)$, на которых верны все формулы из Γ, зависящие только от переменных $p_1, \ldots, p_n$.

(б) Докажите лемму Кёнига при помощи теоремы о компактности.

Указание: для каждой вершины дерева введите переменную, «означающую» утверждение «данная вершина лежит на искомой бесконечной ветви»; запишите формулы, «утверждающие», что вершины, соответствующие истинным переменным, образуют ветвь; докажите, что любое конечное множество полученных формул выполнимо.

Вышеприведенные задачи 1–7 принимаются только до 16 октября (включительно).

(8) **(Об СКНФ)** Докажите следующие утверждения.

(а) Всякая формула от переменных $p_1, \ldots, p_n$ равносильна некоторой СКНФ от этих переменных.

(б) Всякая формула равносильна единственной СКНФ, с точностью до перестановок членов и расстановки скобок в конъюнкциях и дизъюнкциях.

(9) **(Теорема двойственности)** Пусть в формуле $A(p_1, \ldots, p_n)$ используются только связки $\wedge, \vee, \neg$. Заменив в ней всюду $\wedge$ на $\vee$ и наоборот, получим формулу A^*.

(а) Докажите, что формула $A^*(p_1, \ldots, p_n)$ равносильна формуле $\neg A(\neg p_1, \ldots, \neg p_n)$.

(б) Докажите **теорему двойственности**: если $A \sim B$, то $A^* \sim B^*$.

Булевы алгебры

(10) Докажите, что во всякой булевой алгебре $(\mathcal{B}, \sqcup, \sqcap, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ следующие условия эквивалентны (они дают определение отношения *частичного порядка* $a \leqslant b$ на $\mathcal{B}$):

$$(1)\ a \sqcap b = a; \qquad (2)\ a \sqcup b = b; \qquad (3)\ a \sqcap -b = \mathbf{0}; \qquad (4)\ -a \sqcup b = \mathbf{1}.$$

(11*) **(Теорема Стоуна для конечных булевых алгебр)** Докажите, что всякая конечная булева алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна алгебре вида $\mathcal{P}(E)$ (множество всех подмножеств множества E); и следовательно, состоит из 2^n элементов, для некоторого n.

Указание: В качестве E возьмите множество всех атомов булевой алгебры $\mathcal{B}$.

(12) Докажите, что в алгебре Линденбаума – Тарского нет атомов.

Исчисление высказываний

(Классическое) исчисление высказываний

Аксиомы (точнее, **схемы аксиом**):

(1) $A \to (B \to A)$	**(2)** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(3) $A \wedge B \to A$	**(6)** $A \to A \vee B$
(4) $A \wedge B \to B$	**(7)** $B \to A \vee B$
(5) $A \to (B \to A \wedge B)$	**(8)** $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	**(10)** $\neg\neg A \to A$

Правило вывода: *modus ponens* **(MP)** $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$

(13) Постройте вывод «закона исключенного третьего» $A \vee \neg A$ из данных аксиом.

Указание: выведите сначала $\neg\neg(A \vee \neg A)$ без использования закона снятия двойного отрицания, то есть без аксиомы (10); затем примените эту аксиому.

(14*) **(Аксиоматика для импликации и отрицания)** Докажите, что набор аксиом для связок $\to$ и $\neg$, то есть $\{(1), (2), (9), (10)\}$, является полным в следующем смысле: всякая тавтология, использующая лишь связки $\to$ и $\neg$, выводима из данных аксиом.

Указание: используйте функциональную полноту набора связок $\{\to, \neg\}$, а также полноту обычного исчисления высказываний.

(15**) **(Аксиоматика для импликации)** Докажите, что аксиомы (1) и (2) для импликации вместе с приводимым ниже «законом Пирса» дают полное исчисление в следующем смысле: всякая формула, использующая лишь связку $\to$, является тавтологией тогда и только тогда, когда она выводима из данных аксиом.

$$\text{(PL)} \quad ((A \to B) \to A) \to A \qquad \text{(закон Пирса)}$$

Задачи 8-15 принимаются до 13 ноября (включительно).

Язык первого порядка: выполнимость

(16) Докажите, что следующая формула истинна во всех конечных интерпретациях, но не общезначима: $\big[\forall x\, S(x,x)\ \wedge\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, (S(x,z) \to (S(x,y) \vee S(y,z)))\big]\ \to\ \exists a\, \forall b\, S(a,b)$.

(17) В сигнатуре, состоящей только из равенства $\{=\}$, можно записать замкнутые формулы $A_{=n}$, где $n \geqslant 1$, истинные в точности на моделях[1] мощности n.

(а) Докажите, что всякая замнутая формула сигнатуры $\{=\}$ равносильна *булевой комбинации*[2] некоторых из формул $A_{=n}$.

(б) *Спектр* замкнутой формулы A — это множество натуральных чисел $n \geqslant 1$, таких что формула A выполнима в некоторой (нормальной!) модели мощности n. Докажите, что спектр всякой замкнутой формулы A языка $\{=\}$ либо конечен, либо ко-конечен.[3]

(в) Докажите, что любые две бесконечные модели сигнатуры $\{=\}$ элементарно эквивалентны (неотличимы друг от друга формулами этого языка).

(18) В сигнатуре $\{R, =\}$, где R — двуместный предикатный символ, запишите формулу, выражающую: «*R рефлексивно и транзитивно, и каждый элемент связан отношением R ровно с двумя элементами*».[4] Докажите, спектр данной формулы — множество всех четных (положительных) натуральных чисел.

(19) Постройте замкнутую формулу некоторой сигнатуры с равенством, спектр которой есть множество $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(20) Докажите, что элементарная теория конечной (нормальной) модели произвольной (даже бесконечной) сигнатуры с равенством сильно категорична.

[1] **Примечание.** В задачах с равенством рассматриваем только *нормальные* модели.
[2] То есть формуле, построенной из некоторых $A_{=n}$ с помощью булевых связок $\wedge, \vee, \neg$.
[3] То есть его дополнение до $\mathbb{N}$ конечно.
[4] То есть для каждого x найдется ровно два y (включая сам x, ввиду рефлексивности) таких, что $R(x,y)$.

Язык первого порядка: аксиоматизируемость

Напомним, что класс моделей $\mathbb{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если если существует такое множество формул Γ, что $\mathbb{K}$ есть в точности класс моделей, в которых истинно Γ; *конечно аксиоматизируемым*, если Γ можно выбрать конечным. Можно пользоваться следующей теоремой, верной как для сигнатур без равенства и произвольных моделей, так и для сигнатур с равенством и нормальных моделей; а также вытекающей из неё теоремой о компактности.

> Теорема о корректности и полноте логики предикатов. *Для произвольного множества замкнутых формул Γ и замкнутой формулы A сигнатуры Ω верна следующая эквивалентность: из Γ выводится в исчислении предикатов формула A тогда и только тогда, когда из Γ семантически следует формула A.*
> $$\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$$

(21) Пусть T и S — теории в сигнатуре Ω, причем их объединение $T \cup S$ противоречиво, и всякая модель сигнатуры Ω является моделью либо теории T, либо теории S. Докажите, что обе теории T и S конечно аксиоматизируемы.

(22) Эта задача — инструмент доказательства не (конечной) аксиоматизируемости.

(а) (Критерий Тарского). Докажите, что если $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots$ есть строго расширяющаяся[5] цепь теорий, то их объединение не конечно аксиоматизируемо.[6]

(б) Всякий аксиоматизируемый класс моделей $\mathbb{K}$ *компактен*: если Γ — произвольное множество замкнутых формул, и каждое его конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в $\mathbb{K}$, то и всё множество формул Γ выполнимо в $\mathbb{K}$.

(23) Рассмотрим сигнатуру $\{R, =\}$, где R — двуместный предикатный символ, и класс $\mathbb{K}$ бесконечных моделей этой сигнатуры, в которых R проинтерпретирован отношением эквивалентности, все классы эквивалентности которого двухэлементны. Докажите, что $\mathbb{K}$ аксиоматизируем (выпишите его аксиомы), но не конечно аксиоматизируемы.

(24) Рассматриваем поля как модели сигнатуры $\{=, +, \times, 0, 1\}$. Докажите:[7]
(а) класс полей фиксированной характеристики $n \geqslant 1$ конечно аксиоматизируем;
(б) класс полей всевозможных положительных характеристик не аксиоматизируем;
(в) класс полей характеритики 0 аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем;
(г) класс бесконечных полей положительных характеристик является объединением аксиоматизируемых классов, но ни он, ни его дополнение не аксиоматизируем.

(25) Класс структур $\mathbb{K} = \{(D, E) \mid D \text{ бесконечно, } E \subseteq D,\ E \text{ конечно}\}$ можно рассматривать как класс моделей сигнатуры $\{P, =\}$, где P — одноместный предикатный символ.

(а) Представьте $\mathbb{K}$ в виде (бесконечного) объединения аксиоматизируемых классов.
(б) Докажите, что $\mathbb{K}$ не аксиоматизируем (даже бесконечным множеством формул).
(в) Докажите, что дополнение класса $\mathbb{K}$ тоже не аксиоматизируемо.

(26) Пусть $\mathbb{K}$ — произвольный класс моделей сигнатуры $\{=\}$, являющийся объединением некоторых аксиоматизируемых классов моделей. Докажите, что тогда либо класс $\mathbb{K}$, либо его дополнение является аксиоматизируемым классом.

---

[5] Теория T' называется *строгим расширением* теории T, если множество теорем теории T' строго содержит множество теорем теории T.

[6] Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует конечное множество формул, из которых выводятся все теоремы теории T.

[7] Напомним, что *характеристикой* поля называется наименьшее целое число $n \geqslant 1$, такое что сумма n единиц равна 0, если такое n существует, и число 0 в противном случае.