Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 6

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Языки первого порядка: синтаксис

Отличия языка 1-го порядка от языка логики высказываний:

- Вместо пропозициональных переменных используются атомарные формулы.
- Для индуктивного построения формул, кроме логических связок, применяются кванторы.

Определение 1. Сигнатурой (первого порядка) *называется четверка вида* $\Omega = (Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega, \nu)$, *в которой*

- $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ *— попарно не пересекающиеся множества,*
- $Pred_\Omega \neq \varnothing$,
- $\nu : Pred_\Omega \cup Fun_\Omega \longrightarrow \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$.

Множества $Pred_\Omega, Const_\Omega, Fun_\Omega$ *называются соответственно множеством* предикатных символов, *множеством* (предметных) констант *и множеством* функциональных символов *сигнатуры* Ω. ν *называется* функцией валентности.

Предикатный или функциональный символ G *называется* n-местным (n-арным), *если* $\nu(G) = n$. *Чтобы это подчеркнуть, его обозначают* G^n.

Определение 2. *Алфавит языка первого порядка сигнатуры* Ω *состоит из*

- *всех предикатных символов, констант и функциональных символов* Ω*;*
- *счетного множества свободных (предметных) переменных* $FVar = \{a_0, a_1, \dots\}$*;*
- *счетного множества связанных (предметных) переменных* $BVar = \{v_0, v_1, \dots\}$*;*
- *логических связок:* $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$*;*
- *кванторов:* $\forall, \exists$*;*
- *технических символов: (,) (скобки), “,” (запятая).*

Предполагаем, что все эти множества попарно не пересекаются.

Как правило, для обозначения свободных переменных мы будем использовать $a, b, c, \dots$ вместо символов a_i, а для связанных — $x, y, z, \dots$ вместо v_i.

Язык первого порядка данной сигнатуры состоит из двух видов слов в этом алфавите: термов и формул.

Определение 3. Термы сигнатуры Ω *строятся индуктивно:*

- *все константы — термы,*
- *все свободные переменные — термы,*
- *если* $f^n \in Fun_\Omega$ *и* $t_1, \dots, t_n$ *— термы, то* $f(t_1, \dots, t_n)$ *— терм.*

Таким образом, мы индукцией по длине слова, определяем, какие слова считаются термами.

Это определение можно сформулировать иначе:

Множество термов сигнатуры Ω — это наименьшее множество слов X, такое что

- $Const_\Omega \subseteq X$,
- $FVar \subseteq X$,

- если $f^n \in Fun_\Omega$ и $t_1, \ldots, t_n \in X$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in X$.

Определение 4. Атомарные формулы сигнатуры Ω — *это слова вида* $P(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $P^n \in Pred_\Omega$*, а* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* Ω*.*

Определение 5. Формулы сигнатуры Ω *строятся индуктивно:*

- *все атомарные формулы являются формулами;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \wedge B)$ *— формула;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \vee B)$ *— формула;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \to B)$ *— формула;*
- *если* A *— формула, то* $\neg A$ *— формула;*
- *если* A *— формула,* $a \in FVar$*,* $x \in BVar$ *и* x *не входит в* A*, то* $\exists x[x/a]A$ *— формула;*
- *если* A *— формула,* $a \in FVar$*,* $x \in BVar$ *и* x *не входит в* A*, то* $\forall x[x/a]A$ *— формула.*

В этом определении запись $[x/a]A$ *означает результат замены всех вхождений переменной* a *в* A *на переменную* x *(в частности,* $[x/a]A = A$*, если* a *не входит в* A*).*

Обозначения (для сигнатуры Ω):

Tm_Ω — множество всех термов,

Fm_Ω — множество всех формул,

AFm_Ω — множество всех атомарных формул.

Замечание В любой формуле кванторы по одной и той же переменной могут встречаться только в непересекающихся подформулах. Например, если $P^1 \in Pred_\Omega$ и $x \in BVar$, то

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$$

— формула, а

$$\exists x (P(x) \wedge \exists x \neg P(x))$$

— не формула.

Существуют и другие варианты определения формулы. Самый распространенный вариант: свободные и связанные переменные не различаются, а кванторы применяются без ограничений. Такое определение формулы проще, но при этом варианте усложняется формулировка исчисления предикатов.

При более экзотическом варианте определения связанные переменные исчезают, а вместо них появляются пустые окошки, которые соединяются связями со своими кванторами. Похожее определение используется в "Теории множеств" Бурбаки.

Пример Рассмотрим сигнатуру колец (или сигнатуру арифметики). В ней имеются константы 0,1, предикатный символ $=^2$, и функциональные символы $+^2, \cdot^2$.

Атомарные формулы имеют вид $= (t_1, t_2)$, что мы будем записывать более привычным образом: $(t_1 = t_2)$. Аналогично, термы $+(t_1, t_2)$, $\cdot(t_1, t_2)$ записываются как $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$.

В этой сигнатуре можно написать формулу

$$\exists x((x + x) = a),$$

которая означает, что a — четное число (если речь идет о натуральных или целых числах).

Для коммутативных колец формула

$$\neg(a = 0) \wedge \exists x((x \cdot a) = 0) \wedge \neg(x = 0))$$

означает, что a — делитель нуля, а формула

$$\exists x((x \cdot a) = 1)$$

— что a обратим.

Лемма 6.1 (Лемма об однозначном анализе термов и формул)**.** *Для данной сигнатуры* Ω

(1) Каждый терм есть либо константа, либо свободная переменная, либо имеет вид $f(t_1, \dots, t_n)$ для единственного функционального символа f^n и термов $t_1, \dots, t_n$.

(2) Каждая атомарная формула имеет вид $P(t_1, \dots, t_n)$ для единственного предикатного символа P^n и термов $t_1, \dots, t_n$.

(3) Для любой формулы C выполнено ровно одно из условий:

- *C — атомарная,*
- *Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \wedge B)$,*
- *Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \vee B)$,*
- *Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \to B)$,*
- *Существует единственная формула A, такая что $C = \neg A$,*
- *$C = \exists x[x/a]A$ для некоторой формулы A и $a \in FVar$, $x \in BVar$,*
- *$C = \forall x[x/a]A$ для некоторой формулы A и $a \in FVar$, $x \in BVar$.*

Доказательство опускаем. Отметим, что в последних двух случаях формула A уже не единственна: например,

$$\exists x P(x) = \exists x[x/a]P(a) = \exists x[x/b]P(b).$$

Языки первого порядка: семантика

Определение 6. Модель сигнатуры Ω*, или* Ω-структура*, — это пара вида $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$, где*

$\underline{M}$ *— непустое множество (*носитель модели*),*

$\mathcal{I}$ *— функция, определенная на множестве $Pred_\Omega \cup Const_\Omega \cup Fun_\Omega$ (*интерпретирующая функция*), причем*

- *Если $c \in Const_\Omega$, то $\mathcal{I}(c) \in \underline{M}$,*
- *Если $P^n \in Pred_\Omega$, то $\mathcal{I}(P) : \underline{M}^n \longrightarrow \{и, л\}$*[1]
  (т.е. $\mathcal{I}(P)$ — n-местный предикат на $\underline{M}$*),*
- *Если $f^n \in Fun_\Omega$, то $\mathcal{I}(f) : \underline{M}^n \longrightarrow \underline{M}$*
  (т.е. $\mathcal{I}(f)$ — n-местная операция на $\underline{M}$*).*

В дальнейшем для заданной модели $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$ пишем c_M, P_M, F_M соответственно вместо $\mathcal{I}(c), \mathcal{I}(P), \mathcal{I}(f)$ и $m \in M$ вместо $m \in \underline{M}$.

[1]Как и в логике высказываний, далее мы будем отождествлять значения истинности *и, л* с 0, 1. Пока мы этого не делаем — во избежание путаницы.

Определение 7. *Терм, не содержащий переменных (т.е. построенный из констант и функциональных символов), называется* замкнутым. *Для сигнатуры* Ω *множество всех замкнутых термов обозначается* CTm_Ω*,*

Для замкнутого терма t *сигнатуры* Ω *индукцией по длине определяется его* значение в модели M *сигнатуры* Ω*; оно обозначается* $|t|_M$.

- $|c|_M := c_M$ *для* $c \in Const_\Omega$,
- $|f(t_1,\ldots,t_n)|_M := f_M(|t_1|_M,\ldots,|t_n|_M)$
  для $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1,\ldots,t_n \in CTm_\Omega$.

Определение 8. Замкнутая атомарная формула *имеет вид* $P^n(t_1,\ldots,t_n)$, *где* $t_1,\ldots,t_n$ *— замкнутые термы.*

Для замкнутой атомарной формулы сигнатуры Ω *ее* значение в модели M *той же сигнатуры определяется так:*

$$|P(t_1,\ldots,t_n)|_M := P_M(|t_1|_M,\ldots,|t_n|_M).$$

Определение 9. *Модель* M *сигнатуры, содержащей 2-местный предикатный символ равенства* $=$*, называется* нормальной*, если для всех* m_1, m_2 *из* M

$$=_M (m_1,m_2) = \begin{cases} и, & \textit{если } m_1, m_2 \textit{ совпадают,} \\ л, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Пример Модель сигнатуры колец — это произвольное непустое множество $\underline{M}$ с выбранными как угодно элементами $0_M, 1_M$, предикатом $=_M$ (как в определении 9) и операциями $+_M, \cdot_M$. Она не обязана быть кольцом.

Если $M = \mathbb{N}$ с обычным пониманием символов $0, 1, +, \cdot$, то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 2 (но символа 2 в нашей сигнатуре нет, это — элемент модели). А

Если же $M = \mathbb{Z}_2$ (кольцо вычетов mod 2), то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 0_M.

Замкнутая атомарная формула $1+1=0$ принимает значение *и* в модели $\mathbb{Z}_2$ и *л* в модели $\mathbb{N}$.

Лемма 6.2. *Пусть* M *— модель сигнатуры* Ω*. Значения замкнутых термов в* M *определены корректно. Это означает, что существует единственное отображение* $t \mapsto |t|_M$ *из* CTm_Ω *в* $\underline{M}$*, удовлетворяющее условиям из определения 7:*

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_\Omega$,

- $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $f^n \in Fun_\Omega$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_\Omega$.

Доказательство Аналогично лемме 2.1. Индукцией по длине t доказываем, что $|t|_M$ определяется однозначно.

Базис индукции: если t — константа, то все очевидно.

Шаг индукции. По лемме 6.1, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ для единственного функционального символа f и термов $t_1, \ldots, t_n$. По предположению индукции, $|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M$ определены однозначно, и тогда $|t|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$ тоже задается однозначно. ■

Лемма 6.3. *Значения замкнутых атомарных формул в модели определены корректно.*

Доказательство Очевидное следствие лемм 6.1 и 6.2. ■

Определение 10. *Формула, не содержащая свободных переменных, называется* замкнутой*, или* предложением*.*

Для сигнатуры Ω множество всех замкнутых формул обозначается CFm_Ω.

Значение произвольной замкнутой формулы в модели определяется по индукции; оно отражает интуитивное понимание связок и кванторов. Точное определение мы дадим в лекции 7, а пока отметим лишь, что для связок $\vee, \wedge, \neg$ определение аналогично логике высказываний. Т.е. $|A \wedge B| = \min(|A|, |B|)$, $|\neg A| = 1 - |A|$ и т.д.

Определение 11. *Пусть M — модель сигнатуры Ω, A — замкнутая формула сигнатуры Ω. Говорят, что A* истинна *(или* выполнима*) в M, если $|A|_M = 1$. В этом случае также говорят, что M —* модель *A и пишут $M \vDash A$.*

Замкнутая формула называется выполнимой*, если она имеет модель;* общезначимой *— если она истинна во всех моделях данной сигнатуры.*

Определение 12. *Теорией первого порядка в сигнатуре Ω называется любое множество замкнутых формул этой сигнатуры; элементы теории называются также ее* аксиомами*.*

Говорят, что теория T выполнима *в модели M, или что M —* модель *T, и пишут $M \vDash T$, если все формулы из T истинны в M.*

Теория называется выполнимой *(или* совместной*), если она имеет модель.*

Пример 1 Рассмотрим *сигнатуру равенства*. В ней единственный 2-местный предикатный символ "=" (равенство) и нет ни констант, ни функциональных символов. *Чистая теория равенства* (которую мы обозначим Eq) содержит 3 аксиомы:

$$\forall x(x = x),$$
$$\forall x \forall y(x = y \to y = x),$$
$$\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \to x = z).$$

Всякая модель сигнатуры равенства — это непустое множество с произвольным 2-местным предикатом $=_M$. Если же $M \models Eq$, то предикат $=_M$ должен быть рефлексивным, симметричным и транзитивным (такой предикат называется *эквивалентностью*).

В любой нормальной модели истинны все аксиомы Eq; в этом случае $=_M$ — предикат равенства.

Определение 13. *Пусть T — теория, A — замкнутая формула в ее сигнатуре. Говорят, что A* логически *(или* семантически*)* следует из T *(обозначение: $T \models A$), если A истинна во всех моделях T.*

Очевидны следующие свойства:

1. Если T не выполнима, то $T \models A$ для всех A.
2. $T \not\models A \Leftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ выполнима.

Определение 14. *Теория называется* полной*, если для любой замкнутой формулы A в ее сигнатуре хотя бы одна из формул A, $\neg A$ логически следует из T.*

Очевидно, что всякая невыполнимая теория полна: из нее следуют все формулы той же сигнатуры. Если же теория выполнима и полна, то либо $T \models A$, либо $T \models \neg A$, но не одновременно: в модели T не могут быть истинны и A, и $\neg A$.

Определение 15. Элементарной теорией *модели M называется множество всех замкнутых формул в ее сигнатуре, истинных в M; обозначение: $Th(M)$.*

Пример 2 Любая теория $Th(M)$ полна: если замкнутая формула A верна в M, то она принадлежит теории $Th(M)$ и значит, следует из нее; если же A ложна в M, то $\neg A \in Th(M)$, поэтому $Th(M) \vDash \neg A$.

Пример 3 Чистая теория равенства Eq неполна. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим формулу

$$A_{=1} := \forall x \forall y (x = y).$$

Заметим, что в нормальной модели

$$M \vDash A_{=1} \Leftrightarrow |M| = 1$$

(где $|M|$ — мощность модели M, т.е. мощность ее носителя). Поэтому

- $Eq \nvDash \neg A_{=1}$ — т.к. теория $Eq \cup \{A_{=1}\}$ выполнима: у нее есть 1-элементная нормальная модель.
- $Eq \nvDash A_{=1}$ — т.к. теория $Eq \cup \{\neg A_{=1}\}$ выполнима: у нее есть (например) 10-элементная нормальная модель.

Пример 4 Теория $T = Eq \cup \{A_{=1}\}$ полна. Аккуратно это утверждение мы докажем позже (см. лекцию 9), но интуитивно оно понятно: все нормальные модели этой теории одноэлементны и потому они не отличимы никакими формулами. А ненормальные модели можно не учитывать. Значит, не могут быть выполнимы обе теории $T \cup \{A\},\ T \cup \{\neg A\}$.