Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 8

Теорема 7.4. *Пусть M, M' — модели сигнатуры Ω, $\alpha : M \cong M'$.*

(1) Если $t \in CTm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha \cdot t|_{M'} = \alpha(|t|_M)$.

(2) Если $A \in CFm_{\Omega \cup M}$, то $|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M$.

Доказательство (окончание)

(2) Применяем индукцию по числу вхождений логических связок и кванторов в A.

(2.1) (базис индукции) $A = P(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная (P^n — предикатный символ, $t_1, \dots, t_n$ — термы).

Доказательство — почти такое же, как в случае (1.3).

$$|A|_M = P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M)$$

(опр. 4 лекции 7). С другой стороны,

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = P_{M'}(|\alpha \cdot t_1|_{M'}, \dots, |\alpha \cdot t_n|_{M'}) = P_{M'}(\alpha(|t_1|_M), \dots, \alpha(|t_n|_M)).$$

$$= P_M(|t_1|_M, \dots, |t_n|_M)).$$

по (1) и определению изоморфизма. Отсюда получаем:

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M.$$

(2.2) $A = (B \wedge C)$.

(2.3) $A = (B \vee C)$,

(2.4) $A = (B \to C)$,

(2.5) $A = \neg B$.

Эти простые случаи оставляются читателю в качестве упражнения.

(2.6) $A = \exists x[x/a]B$.

По определению истинности

(*)

$$|\alpha{\cdot}A|_{M'} = |\exists x[x/a](\alpha{\cdot}B)|_{M'} = \max_{m'\in M'} |[m'/a](\alpha{\cdot}B)|_{M'} = \max_{m\in M} |[\alpha(m)/a](\alpha{\cdot}B)|_{M'}$$

Последнее равенство следует из сюръективности α: все $m' \in M'$ — это в точности α-образы всех $m \in M$.

Также по определению истинности и предположению индукции для $[m/a]B$

$$(**) \qquad |A|_M = \max_{m\in M} |[m/a]B|_M = \max_{m\in M} |\alpha \cdot [m/a]B|_M$$

Но

$$(***) \qquad \alpha \cdot [m/a]B = [\alpha(m)/a](\alpha \cdot B).$$

Действительно, левая часть получается из B сначала заменой a на m, а потом всех элементов из M на их образы. В итоге a заменится на $\alpha(m)$. В правой части: сначала в B все элементы из M заменяются на их образы, а потом a сразу заменяется на $\alpha(m)$.

Собирая вместе $(*), (**), (***)$, получаем

$$|\alpha \cdot A|_{M'} = |A|_M.$$

(2.7) $A = \forall x[x/a]B$.

Этот случай совершенно аналогичен (2.6); max заменяется на min. ■

Теорема 8.1. *Если $M \cong M'$, то $M \equiv M'$.*

Доказательство Пусть $\alpha : M \cong M'$. Если A — замкнутая формула данной сигнатуры, то $\alpha \cdot A = A$, т.к. A не содержит констант из M. По теореме 7.4(2)

$$|A|_M = |A|_{M'},$$

или

$$M \vDash A \Leftrightarrow M' \vDash A.$$

Это выполняется для любой замкнутой A, а потому $Th(M) = Th(M')$, т.е. $M \equiv M'$. ■

Определимость и автоморфизмы

Определение 1. *k-местный предикат на множестве M — это отображение $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$. k-местное отношение на множестве M — это множество $R \subseteq M^k$.*

Любому k-местному отношению $R \subseteq M^k$ соответствует k-местный предикат — его характеристическая функция $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$:

$$\gamma(m_1, \dots, m_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } (m_1, \dots, m_k) \in R, \\ 0 \text{ иначе }. \end{cases}$$

И наоборот, предикату $\gamma : M^k \longrightarrow \{0,1\}$ соответствует отношение

$$R = \{(m_1, \dots, m_k) \mid \gamma(m_1, \dots, m_k) = 1\}.$$

В частности, при $k = 1$: подмножествам M соответствуют одноместные предикаты на M.

Определение 2. Параметрами *формулы (некоторой сигнатуры) называются входящие в нее свободные переменные. $FV(A)$ обозначает множество всех параметров формулы A.*

Формулу A мы записываем в виде $A(b_1, \dots, b_k)$, если хотим отметить, что $FV(A) \subseteq \{b_1, \dots, b_k\}$. При этом некоторые b_i могут и не встречаться в A. Подразумевается, что все b_i различны.

Аналогичную терминологию и обозначения применяем для термов; разница лишь в том, что в термах могут встречаться только свободные переменные. Т.е. параметры терма t — это все входящие в него переменные; их множество обозначается $FV(t)$. Запись $t(b_1, \dots, b_k)$ означает, что $FV(t) \subseteq \{b_1, \dots, b_k\}$.

Определение 3. *Рассмотрим формулу $A(\overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b} = (b_1, \dots, b_k)$.*
k-местный предикат, определимый формулой $A(\overrightarrow{b})$ в модели M *— это* $A_M : \underline{M}^k \longrightarrow \{0,1\}$*, такой что для всех $m_1, \dots, m_k$*

$$A_M(m_1, \dots, m_k) = |[m_1, \dots, m_k / b_1, \dots, b_k]A|_M.$$

Здесь использовано обозначение многократной подстановки:
$[m_1, \dots, m_k / b_1, \dots, b_k]A$ получается из A заменой $b_1, \dots, b_k$ соответственно на $m_1, \dots, m_k$. В сокращенных обозначениях определение записывается так:

$$A_M(\overrightarrow{m}) = |A(\overrightarrow{m})|_M.$$

для всех $\overrightarrow{m} \in M^k$.[1]

Примеры Рассмотрим опять сигнатуру колец и ее модель $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел с обычными сложением, умножением, нулем и единицей. Рассмотрим в этой модели 2-местный предикат $m_1 \leq m_2$. Он определим формулой $\exists x(b_1 + x = b_2)$:

$$\mathbf{N} \vDash \exists x(m_1 + x = m_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2.$$

В этой формуле используется только сложение, поэтому определимость сохранится и для более бедной сигнатуры, в которой есть только $+$ и $=$.

Для того, чтобы задать порядок на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, сложения уже не хватит, т.е. в $\mathbf{R}$ как модели сигнатуры $\{+,=\}$ предикат $m_1 \leq m_2$ не определим — это мы установим чуть позже. Но легко доказать определимость в сигнатуре колец:

$$\mathbf{R} \vDash \exists x(m_1 + x \cdot x = m_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2.$$

Докажем необходимое условие определимости предиката в модели.

Как и в алгебре, *автоморфизм* модели — это ее изоморфизм на себя.

Теорема 8.2. *Пусть α — автоморфизм модели сигнатуры Ω, $A(b_1, \dots, b_k)$ — формула той же сигнатуры. Тогда для всех $m_1, \dots, m_k \in M$*

$$A_M(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_k)) = A_M(m_1, \dots, m_k).$$

В сокращенной записи:

$$A_M(\alpha\overrightarrow{m}) = A_M(\overrightarrow{m}).$$

Таким образом, определимый в M предикат инвариантен при всех автоморфизмах M.

Доказательство По определению 3 и теореме 7.4

$$A_M(\alpha\overrightarrow{m}) = |A(\alpha\overrightarrow{m})|_M = |A(\overrightarrow{m})|_M = A_M(\overrightarrow{m}).$$

■

Поскольку предикаты соответствуют отношениям, мы можем говорить и об определимости отношений: k-местное отношение R определимо в M формулой $A(\overrightarrow{b})$, если определим соответствующий предикат, т.е. для всех $\overrightarrow{m} \in M^k$

$$M \vDash A(\overrightarrow{m}) \Leftrightarrow \overrightarrow{m} \in R.$$

[1] Для краткости мы пишем M^k вместо $\underline{M}^k$.

В частности (при $k = 1$): подмножество $S \subseteq M$ определимо формулой $A(a)$, если для всех $m \in M$

$$M \vDash A(m) \Leftrightarrow m \in S.$$

Теорема 8.2 означает, что определимые отношения инвариантны при автоморфизмах:

$$\overrightarrow{m} \in R \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{m} \in R.$$

Пример 1 Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbf{R}$ как модель сигнатуры $\{=^2, +^2, 0\}$, с обычным пониманием этих символов.

У этой модели есть автоморфизм $\alpha(x) = -x$: это отображение — биекция (обратно само к себе), сохраняет 0 и сумму.

Предикат $m_1 \leq m_2$ не определим в этой модели, т.к. он не инвариантен при этом автоморфизме: неверно, что $m_1 \leq m_2 \Leftrightarrow -m_1 \leq -m_2$.

Пример 2 Рассмотрим $\mathbf{Z}$ в той же сигнатуре, что в примере 1. Тогда подмножество $\mathbf{N}$ не определимо: оно не инвариантно при автоморфизме $\alpha(x) = -x$.

Однако, если добавить в сигнатуру умножение, $\mathbf{N}$ станет определимым. Для этого можно применить теорему Лагранжа о представимости всякого натурального числа в виде суммы 4 квадратов:

$$\mathbf{Z} \vDash \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m) \Leftrightarrow m \in \mathbf{N},$$

где x^2 обозначает $x \cdot x$.

Конечно же, и в этой сигнатуре не все подмножества определимы: определимых подмножеств (как и всех формул в данной сигнатуре) — счетное число, а всех подмножеств — континуум.

Определение 4. *Подмножества* $\mathbf{N}$*, определимые в сигнатуре колец (она же — сигнатура арифметики), называются* арифметическими*.*

Как и в случае $\mathbf{Z}$, таких множество таких подмножеств счетно. Однако теорема 8.1 никак не помогает построить конкретные неарифметические множества: легко видеть, что единственный автоморфизм модели $\mathbf{N}$ — тождественный (Упражнение).

Стандартные теории равенства и нормальные модели

Пусть $A = A(b_1, \ldots, b_n)$ — формула. Если же $x_1, \ldots, x_n$ — какие-то (различные) связанные переменные, не входящие в A, то результат подстановки

$[x_1, \ldots, x_n/b_1, \ldots, b_n]A$ будем обозначать через $A(x_1, \ldots, x_n)$. (Заметим, что выражение $A(x_1, \ldots, x_n)$ — не формула, но может быть частью формулы: например, последовательное навешивание кванторов $\forall x_n, \ldots, \forall x_1$ дает формулу $\forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.)

Лемма 8.3. *Пусть $A(b_1, \ldots, b_n)$ — формула сигнатуры Ω, $x_1, \ldots, x_n$ — (различные) связанные переменные, не входящие в A. Тогда для любой модели M сигнатуры Ω*

$$M \models \forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \text{ для всех } m_1, \ldots, m_n \in M \ M \models A(m_1, \ldots, m_n),$$

$$M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \text{ для некоторых } m_1, \ldots, m_n \in M \ M \models A(m_1, \ldots, m_n).$$

Доказательство Мы рассмотрим только случай кванторов $\forall$; для $\exists$ доказательство аналогично.

Утверждение следует из определения истинности (формально — индукцией по n). А именно, $A = \forall x_1 [x_1/b_1] B(b_1)$, где

$$B(b_1) := \forall x_2 \ldots \forall x_n A(b_1, x_2, \ldots, x_n).$$

И тогда

(1) $\quad M \models A \Leftrightarrow$ для всех $m_1 \in M$ $M \models B(m_1)$.

Но

$$B(m_1) = \forall x_2 \ldots \forall x_n A(m_1, x_2, \ldots, x_n);$$

это формула в сигнатуре $\Omega \cup M$. Применим к ней предположение индукции:

(2) $\quad M \models \forall x_2 \ldots \forall x_n A(m_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow$

$$\text{для всех } m_2, \ldots, m_n \in M \ M \models A(m_1, m_2, \ldots, m_n).$$

Из (1) и (2) получаем утверждение леммы. Это — шаг индукции, а базис (при $n = 1$) очевиден. ■

Теперь рассмотрим сигнатуру Ω, содержащую предикатный символ равенства $(=)$ (и, возможно, другие символы). В этой сигнатуре рассмотрим теорию Eq_Ω со следующими *стандартными аксиомами равенства.*

(O) Аксиомы теории Eq (лекция 7, пример 1) — рефлексивность, симметричность и транзитивность.

(I) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to (P^n(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow P^n(y_1,\ldots,y_n)))$ для всех $P^n \in Pred_\Omega$.

(II) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i \to f^n(x_1,\ldots,x_n) = f^n(y_1,\ldots,y_n))$ для всех $f^n \in Fun_\Omega$.

Запишем эти аксиомы в сокращенном виде:

(I) $\forall \overrightarrow{x} \forall \overrightarrow{y} (\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \to (P^n(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow P^n(\overrightarrow{y})))$.

(II) $\forall \overrightarrow{x} \forall \overrightarrow{y} (\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \to f^n(\overrightarrow{x}) = f^n(\overrightarrow{y}))$.

Здесь $\overline{\forall}$ обозначает кванторы $\forall$ по всем переменным $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, а $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ — сокращение для $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$.

Лемма 8.4. *Если M — нормальная модель сигнатуры с равенством Ω, то $M \models Eq_\Omega$.*

Доказательство Для аксиом (0) это тривиально (и уже отмечалось).

По лемме 8.3, формула (I) верна в M, если и только если для всех $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m'} \in M^n$

$$M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to (P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'}))$$

(где $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'}$ — сокращение для $m_1 = m'_1 \wedge \ldots \wedge m_n = m'_n$).

Но последнее утверждение очевидно: в нормальной модели
$M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'}$ означает, что $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{m'}$ совпадают; тогда и
$|P(\overrightarrow{m})|_M = |P(\overrightarrow{m'})|_M$, а потому $|P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})|_M = 1$.

Следовательно, верна импликация

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to (P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})).$$

Аналогично рассуждаем для формулы (II):

$$M \models \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'} \to f(\overrightarrow{m}) = f(\overrightarrow{m'}),$$

т.к. из совпадения $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{m'}$ следует совпадение $f_M(\overrightarrow{m})$ и $f_M(\overrightarrow{m'})$. ■

Покажем теперь, как из произвольной модели теории Eq_Ω построить элементарно эквивалентную нормальную модель.

Пусть $M \models Eq_\Omega$. Тогда предикат $=_M$ задает отношение эквивалентности на $\underline{M}$, которое мы обозначим $\approx$. Т.е.

$$m_1 \approx m_2 \ \Leftrightarrow =_M(m_1, m_2) = 1 \ \Leftrightarrow \ M \models m_1 = m_2.$$

Это действительно отношение эквивалентности, благодаря аксиомам Eq. Класс эквивалентности элемента m по $\approx$ обозначим через $\widetilde{m}$.

На фактормножестве $\underline{M}/\approx$ зададим нормальную модель $\widetilde{M}$ сигнатуры Ω следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&c_{\widetilde{M}} := \widetilde{c_M},\\
&f^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1}, \ldots, \widetilde{m_k}) := f^k_M(\widetilde{m_1, \ldots, m_k}),\\
&P^k_{\widetilde{M}}(\widetilde{m_1}, \ldots, \widetilde{m_k}) := P^k_M(m_1, \ldots, m_k)
\end{aligned}
$$

(где соответственно, $c \in Const_\Omega,\ f^k \in Fun_\Omega,\ P^k \in Pred_\Omega$).

Лемма 8.5. $\widetilde{M}$ *корректно определена.*

Доказательство Надо проверить, что если заменить m_i на эквивалентные элементы, то правые части в определении $f^k_{\widetilde{M}}$ и $P^k_{\widetilde{M}}$ не изменятся.

Действительно, пусть $m_1 \approx m'_1, \ldots, m_k \approx m'_k$. Это означает, что $M \vDash m_i = m'_i$ для $i \leq k$, и тогда, в обозначениях из леммы 8.4, $M \vDash \overrightarrow{m} = \overrightarrow{m'}$, где $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $\overrightarrow{m'} = (m'_1, \ldots, m'_k)$. Как уже мы видели в лемме 8.4, из аксиомы (I) тогда следует, что $M \vDash f(\overrightarrow{m}) = f(\overrightarrow{m'})$, т.е. $f_M(\overrightarrow{m}) = f_M(\overrightarrow{m'})$ (т.к. модель нормальна).

Аналогично, из аксиомы (II) получаем: $M \vDash P(\overrightarrow{m}) \leftrightarrow P(\overrightarrow{m'})$, т.е. $P_M(\overrightarrow{m}) = P_M(\overrightarrow{m'})$. ■