Введение в математическую логику (осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 9

На прошлой лекции по модели M стандартной теории равенства Eq_Ω мы построили модель $\widetilde{M}$ с носителем $\underline{M}/{\approx}$. Тогда имеется сюръекция

$$\alpha : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}/{\approx},$$

переводящая каждый элемент $m \in M$ в его класс эквивалентности $\widetilde{m}$. Благодаря определению $\widetilde{M}$, α — сильный гомоморфизм, т.е.

- $\alpha(f_M(\overrightarrow{m})) = f_{\widetilde{M}}(\alpha\overrightarrow{m})$ (для $\overrightarrow{m} \in M^k$, $f^k \in Fun_\Omega$),
- $P_M(\overrightarrow{m}) = P_{\widetilde{M}}(\alpha\overrightarrow{m})$ (для $\overrightarrow{m} \in M^k$, $P^k \in Pred_\Omega$), кроме случая, когда P есть $=$.

Для символа $=$ также имеем[1]

$$=_M (m_1, m_2) \; = \; =_{\widetilde{M}} (\alpha(m_1), \alpha(m_2)).$$

Теорема 9.1. *(Лемма о нормализации)*

(1) Для любого оцененного терма $t \in Tm_{\Omega\cup M}$

$$|\alpha \cdot t|_{\widetilde{M}} = \widetilde{|t|_M}.$$

(2) Для любой оцененной формулы $A \in Fm_{\Omega\cup M}$

$$|\alpha \cdot A|_{\widetilde{M}} = |A|_M.$$

[1] Здесь знак $=$ употребляется в двух смыслах.

(3) $M \equiv \widetilde{M}$.

Доказательство См. теорему 7.2. В доказательстве используется только то, что α — сюръекция.[2] ∎

Итак, для теорий, содержащих стандартные аксиомы равенства, можно рассматривать только нормальные модели.

Теорема 9.2. *Пусть T — теория в сигнатуре с равенством Ω, содержащая Eq_Ω. Предположим, что все нормальные модели T изоморфны (такая теория называется* сильно категоричной*). Тогда T полна.*

Доказательство По лемме 7.1 достаточно доказать, что все модели T элементарно эквивалентны.

Рассмотрим модели $M, M' \models T$. По лемме 9.1, $M \equiv \widetilde{M}$, $M' \equiv \widetilde{M'}$. Поэтому $\widetilde{M}, \widetilde{M'} \models T$. Т.к. эти модели нормальны, по условию они изоморфны. Следовательно, $\widetilde{M} \equiv \widetilde{M'}$ (теорема 8.1). В итоге имеем $M \equiv M'$. ∎

Пример 1 В сигнатуре $\{=\}$ рассмотрим теорию $Eq \cup \{A_{=n}\}$, где

$$A_{=n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \forall x_{n+1} \bigvee_{i \leq n} (x_{n+1} = x_i)).$$

(Здесь мы используем обычное сокращение: $(x_i \neq x_j) := \neg(x_i = x_j)$.)

Эта аксиома утверждает, что в (нормальной) модели ровно n элементов. Очевидно, что данная теория сильно категорична.

Пример 2 Теперь рассмотрим теорию линейных порядков LO в сигнатуре с 2-местными предикатными символами $<$, $=$. Кроме стандартных аксиом равенства, она содержит аксиомы:

$\forall x\ \neg(x < x)$ (иррефлексивность)

$\forall x \forall y \forall z\ (x < y \wedge y < z \to x < z)$ (транзитивность)

$\forall x \forall y\ (x < y \vee y < x \vee x = y)$ (линейность)

Каждая теория $LO + A_{=n}$ сильно категорична, потому что конечные линейные порядки с одинаковым числом элементов изоморфны.

[2] Можно заметить, что для нормальных моделей сигнатуры с равенством сюръективный гомоморфизм всегда биективен: условие $M \models m_1 = m_2 \Leftrightarrow M' \models \alpha(m_1) = \alpha(m_2)$ как раз и означает, что α — биекция. Но сейчас у нас другой случай.

Пример 3 Рассмотрим *сигнатуру групп*, содержащую равенство (=), константу e (“единица”), функциональные символы: $\cdot$ (2-местный, “умножение”), $^{-1}$ (1-местный, “обращение”).

Используем привычную запись: $t_1 \cdot t_2,\ t^{-1}$.

Рассмотрим в этой сигнатуре *теорию групп* Gr со следующими аксиомами.

I. Стандартные аксиомы равенства.

II. Аксиомы групп.

$$\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)).$$

$$\forall x((x \cdot e = x) \wedge (e \cdot x = x)).$$

$$\forall x((x \cdot x^{-1} = e) \wedge (x^{-1} \cdot x = e)).$$

Ясно, что модели теории групп — в точности группы (с единицей и операциями умножения и обращения). У этой теории имеются полные расширения:

1. Теории $Gr + A_{=p}$, где p — простое (лекция 7), сильно категоричны (т.к. группа простого порядка —- циклическая), а потому полны.

2. Если к Gr добавить аксиому коммутативности умножения, получится теория абелевых групп AGr. Теория $Gr + A_{=6}$ неполна (почему?), но $AGr + A_{=6}$ полна, т.к. сильно категорична: ее модели изоморфны $\mathbf{Z}_6$.

В дальнейшем мы рассматриваем только теории с равенством и нормальные модели; отдельные исключения будут оговариваться.

Теория конечной модели

Определение 1. *Теория T называется* конечно аксиоматизируемой*, если она эквивалентна некоторой конечной теории.*

Очевидно, что конечная теория эквивалентна теории, состоящей из одной формулы $\bigwedge T$.

Теорема 9.3. *В конечной сигнатуре с равенством элементарная теория конечной модели конечно аксиоматизируема и сильно категорична.*

Доказательство Пусть M — конечная модель конечной сигнатуры Ω.

Мы построим формулу A_M, которая полностью описывает M.

Пусть $\underline{M} = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Положим

$$A_M := \exists v_1 \ldots \exists v_n \psi_M(v_1, \ldots, v_n),$$

где

$$\psi_M(a_1, \ldots, a_n) := \bigwedge_{1 \le i < j \le n} (a_i \ne a_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = a_i) \wedge$$

$$\bigwedge\{c = a_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge\{f^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = a_j \mid f^k \in Pred_\Omega,\ f^k_M(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \text{ равно } m_j\} \wedge$$

$$\bigwedge\{P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge\{\neg P^k(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Лемма 9.4. *Для нормальной модели M' сигнатуры Ω*

$$M' \vDash A_M \Leftrightarrow M' \cong M.$$

Доказательство

($\Leftarrow$) Заметим, что

$$M \vDash \psi_M(m_1, \ldots, m_n).$$

Действительно,

$$\psi_M(m_1, \ldots, m_n) = \bigwedge_{1 \le i < j \le n} (m_i \ne m_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = m_i) \wedge$$

$$\bigwedge\{c = m_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\} \wedge$$

$$\bigwedge\{f^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j \mid f^k \in Pred_\Omega,\ f^k_M(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \text{ равно } m_j\} \wedge$$

$$\bigwedge\{P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$

$$\bigwedge\{\neg P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Проверим, что все 6 членов этой конъюнкции (все они — тоже конъюнкции, кроме второго) истинны в M.

(1) $M \vDash \bigwedge_{1 \le i < j \le n} (m_i \ne m_j)$, т.к. M нормальна и все m_i различны,

(2) $M \vDash \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = m_i)$, т.к. всякий элемент из M равен одному из m_i.

(3) $M \vDash \bigwedge\{c = m_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\}$,
т.к. для всякой константы c, $M \vDash c = m_i$, если c_M равно m_i — это очевидно, по определению истинности (см. определения 4, 5 лекции 7).

(4) Аналогично, для четвертого члена имеем: $M \vDash f(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = m_j$, если $f_M(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$ равно m_j.

(5) Истинность пятого члена означает, что $M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$, если $M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$. Это тривиальность.

(6) Также очевидно.

Теперь по лемме 8.3, из $M \vDash \psi_M(m_1, \ldots, m_n)$ получаем $M \vDash A_M$. И тогда, если $M \cong M'$, то и $M' \vDash A_M$ — по теореме 8.1.

($\Rightarrow$) Предположим, что $M' \vDash A_M$ и построим изоморфизм M на M'. Снова по лемме 8.3, найдутся $m'_1, \ldots, m'_n \in M'$, для которых

$$M' \vDash \psi_M(m'_1, \ldots, m'_n).$$

Для удобства опять распишем $\psi_M(m'_1, \ldots, m'_n)$:

$$\bigwedge_{1 \le i < j \le n} (m'_i \ne m'_j) \wedge \forall v_{n+1} \bigvee_{i=1}^{n} (v_{n+1} = m'_i) \wedge$$
$$\bigwedge\{c = m'_i \mid c \in Const_\Omega,\ c_M \text{ равно } m_i\} \wedge$$
$$\bigwedge\{f^k(m'_{i_1}, \ldots, m'_{i_k}) = m'_j \mid f^k \in Pred_\Omega,\ f^k_M(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \text{ равно } m_j\} \wedge$$
$$\bigwedge\{P^k(m'_{i_1}, \ldots, m'_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \vDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\} \wedge$$
$$\bigwedge\{\neg P^k(m'_{i_1}, \ldots, m'_{i_k}) \mid P^k \in Pred_\Omega,\ M \nvDash P^k(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})\}.$$

Докажем, что отображение φ, переводящее каждый m_i в m'_i — искомый изоморфизм.

1. φ — инъекция. Это обеспечивает 1-й член конъюнкции: при $i < j$ $M \vDash m'_i \ne m'_j$, т.е. m'_i и m'_j не совпадают.

2. φ — сюръекция. Об этом говорит 2-й член: любой элемент $m' \in M'$ равен одному из m'_i — т.к. $M \vDash \bigvee_{i=1}^{n} (m' = m'_i)$ и M нормальна.

3. $\varphi(c_M)$ равно $c_{M'}$. Это получается из 3-го члена: если c_M равно m_i, то $M' \vDash c = m'_i$, т.е. $c_{M'}$ равно m'_i (которое и есть $\varphi(c_M)$).

4. $\varphi(f^k_M(m_{i_1},\ldots,m_{i_k}))$ равно $f^k_{M'}(\varphi(m_{i_1}),\ldots,\varphi(m_{i_k}))$, т.е. $f^k_{M'}(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k})$. В самом деле, если $f^k_M(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})$ равно m_j, то из 4-го члена, $M' \vDash m'_j = f^k(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k})$, т.е. $\varphi(m_j)$ равно $f^k_{M'}(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k})$.

5. $M' \vDash P^k(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k}) \Leftrightarrow M \vDash P^k(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})$.

Действительно, если $M \vDash P^k(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})$, то из 5-го члена, $M' \vDash P^k(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k})$.

Если же $M \nvDash P^k(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})$, то из 6-го члена, $M' \nvDash P^k(m'_{i_1},\ldots,m'_{i_k})$. ■

Продолжим доказательство теоремы 9.3.

Заметим, что $Th(M) \sim \{A_M\}$.[3] Действительно, по лемме 9.6 $A_M \in Th(M)$ и значит,

$$M' \vDash Th(M) \Rightarrow M' \vDash A_M.$$

Обратно, пусть $M' \vDash A_M$. По той же лемме, $M' \cong M$. И тогда $' \vDash Th(M)$.

Итак, $Th(M)$ конечно аксиоматизируема.

Также $Th(M)$ сильно категорична, т.к. эквивалентная ей теория $\{A_M\}$ сильно категорична по лемме 9.6. ■

Следствие 9.5. *Если M — конечная модель и $M' \equiv M$, то $M' \cong M$.*

Доказательство Если $M' \equiv M$, то $M' \vDash Th(M)$. Тогда, по теореме 9.3, $M' \cong M$. ■

Общезначимость и равносильность

Определение 2. *Замкнутые формулы A, B (в некоторой сигнатуре) называются* равносильными*, если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима (см. определение 11 лекции 6).*

Как и в логике высказываний, равносильность обозначается знаком $\sim$. И мы имеем аналог леммы 2.3:

Лемма 9.6. *$A \sim B$ тогда и только тогда, когда для любой модели M (данной сигнатуры) $|A|_M = |B|_M$.*

[3]Эквивалентность здесь понимается относительно нормальных моделей. Если рассматривать произвольные модели, то надо добавить еще Eq_Ω.

Лемма 9.7. *Пусть $A(\overrightarrow{b})$ — формула сигнатуры Ω; $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ — списки (той же длины, что $\overrightarrow{b}$) различных связанных переменных, не входящих в A.*

(1) $\forall\overrightarrow{x}A(\overrightarrow{x}) \sim \forall\overrightarrow{y}A(\overrightarrow{y})$.

(2) Если формула A замкнута, x — связанная переменная, не входящая в A, то $A \sim \forall xA$.

Здесь $\forall\overrightarrow{x}$ обозначает последовательность кванторов $\forall$ по переменным из списка $\overrightarrow{x}$; аналогично — для $\overrightarrow{y}$.

Доказательство (1) следует из леммы 8.3: получается, что

$$M \vDash \forall\overrightarrow{x}A(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \text{для всех } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ M \vDash A(\overrightarrow{m}).$$

и

$$M \vDash \forall\overrightarrow{y}A(\overrightarrow{y}) \Leftrightarrow \text{для всех } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ M \vDash A(\overrightarrow{m}).$$

Поэтому

$$M \vDash \forall\overrightarrow{x}A(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow M \vDash \forall\overrightarrow{y}A(\overrightarrow{y}).$$

Значит, эти формулы равносильны (лемма 9.6).

(2) — очевидное следствие определения истинности. Действительно, в этом случае $M \vDash \forall xA$ (где $\forall xA$ получается как $\forall x[x/a]A$ с переменной a, не входящей в A) равносильно $M \vDash A$, т.к. при замене фиктивного a на любое m с формулой A ничего не произойдет. ■

Определение 3. *Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — список параметров формулы A в алфавитном порядке*[4]*, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — список первых связанных переменных, не входящих в A, также в алфавитном порядке. Тогда* универсальным замыканием *формулы A называется формула*
$\forall x_1 \ldots \forall x_n[x_1, \ldots, x_n/b_1, \ldots, b_n]A$.

Так определенное универсальное замыкание задается однозначно по A. Но на самом деле нас интересует эта формула с точностью до равносильности. Леммы 8.3, 9.7 показывают, что мы можем расположить $b_1, \ldots, b_n$ в любом порядке, и переменные $x_1, \ldots, x_n$ тоже можно выбрать как угодно — лишь бы они не входили в A — все построенные формулы окажутся

[4]Этот порядок задается нумерацией множества $FVar$, см. лекцию 6.

равносильными. Поэтому универсальным замыканием называют любую из них.

Универсальное замыкание A (какое-нибудь) будем обозначать $\overline{\forall} A$.

Теперь можно определить общезначимость и равносильность для произвольных формул.

Определение 4. *Формула A называется* общезначимой*, если общезначимо ее универсальное замыкание.*

Формулы A, B называются равносильными*, если общезначима формула $\overline{\forall}(A \leftrightarrow B)$.*

Для произвольных формул общезначимость по-прежнему обозначается знаком $\models$, а равносильность — знаком $\sim$.

Таким образом, по лемме 8.3

$$\models A(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \text{ для любой модели } M \text{ и } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ M \models A(\overrightarrow{m}),^{5}$$

$$A(\overrightarrow{a}) \sim B(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \text{ для любой модели } M \text{ и } \overrightarrow{m} \text{ из } M,\ |A(\overrightarrow{m})|_M = |B(\overrightarrow{m})|_M.$$

Лемма 9.8.

(1) $\sim$ задает отношение эквивалентности на Fm_Ω.

(2) $A \sim \forall \overrightarrow{x}[\overrightarrow{x}/\overrightarrow{b}]A$, если $\overrightarrow{b}$ — список различных свободных переменных, не входящих в A; $\overrightarrow{x}$ — список различных связанных переменных, не входящих в A,

Доказательство (1) Можно использовать замечание перед формулировкой леммы. Ясно, что если $|A(\overrightarrow{m})|_M = |B(\overrightarrow{m})|_M$ и $|B(\overrightarrow{m})|_M = |C(\overrightarrow{m})|_M$, то $|A(\overrightarrow{m})|_M = |C(\overrightarrow{m})|_M$.

(2) Применяем несколько раз лемму 9.7 и транзитивность $\sim$. ■

Пусть теперь $F(P_1, \dots, P_n)$ — пропозициональная формула, построенная из пропозициональных переменных $P_1, \dots, P_n$, а $B_1, \dots, B_n$ — формулы сигнатуры Ω. Пусть S — подстановка, заменяющая каждое вхождение P_i на B_i. При этой замене из F получится формула сигнатуры Ω, которую мы обозначим SF, или $F(B_1, \dots, B_n)$. Такая формула называется *подстановочным примером* формулы F.

Сформулируем две леммы, которые докажем на следующей лекции.

[5] Подразумевается, что M — в нужной сигнатуре, а $\overrightarrow{m}$ — список ее элементов нужной длины.

Лемма 9.9. *(Лемма о тавтологиях) Подстановочные примеры тавтологий общезначимы.*

Лемма 9.10.

(1) Если $F_1 \sim F_2$, то $SF_1 \sim SF_2$ (для любых пропозициональных формул F_1, F_2 и подстановки S).

(2) $\neg\forall x[x/a]A \sim \exists x[x/a]\neg A$.

(3) $\neg\exists x[x/a]A \sim \forall x[x/a]\neg A$.

(4) $\text{Я}x[x/a](A \circ B) \sim (\text{Я}x[x/a]A \circ B)$, если a не входит в B (и x не входит ни в A, ни в B).

Здесь Я обозначает квантор $\forall$ или $\exists$, а $\circ$ — связку $\vee$ или $\wedge$.

(5) Если $A \sim B$, то $\neg A \sim \neg B$.

(6) Если $A \sim A'$ и $B \sim B'$ то $(A \circ B) \sim (A' \circ B')$ (где $\circ$ — это $\vee$, $\wedge$ или $\to$).

(7) Если $A \sim B$, то $\text{Я}x[x/a]A \sim \text{Я}x[x/a]B$ (при условии, что x не входит ни в A, ни в B).

(8) $\text{Я}x[x/a]A \sim \text{Я}y[y/a]A \sim \text{Я}y[y/b][b/a]A$, если x, y, b не входят в A (здесь $x, y \in BVar$, $a, b \in FVar$) .