Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 13

Свойства исчисления S5

На прошлой лекции мы для каждой модальной формулы A построили перевод $A^*(a)$ — формулу в сигнатуре с одноместными предикатами. ,

Теорема 13.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\vdash_{S5} A$*,*

(2) $\vdash_{PC} A^*$*,*

(3) $\vDash A^*$*,*

(4) $W \vDash A^*$ *на всех конечных* W*,*

(5) $W \vDash A$ *на всех* W*,*

(6) $W \vDash A$ *на всех конечных* W*.*

Здесь PC понимается как исчисление предикатов в сигнатуре с одноместными предикатами P_i^1 и без равенства.

Доказательство

Доказывать будем следующие импликации:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \Rightarrow & 2 & \Rightarrow & 3 & \Rightarrow & 4 \\ \Uparrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ 6 & & & & 5 & \Rightarrow & 6 \end{array}$$

$(1 \Rightarrow 2)$. Индукция по длине вывода A в $S5$.

- Если A — аксиома группы (I), то A^* — аксиома PC того же вида (из группы I). Например, если $A = (B \wedge C) \to B$, то $A^* = (B^* \wedge C^*) \to B^*$ и т.д.

- Пусть
$$A = (\Box(C \to B) \to (\Box C \to \Box B)).$$
Тогда
$$A^* = (\forall x(C^*(x) \to B^*(x)) \to (\forall x C^*(x) \to \forall x B^*(x))).$$
Тогда $\vdash_{PC} A^*$ получим по теореме дедукции (она применима, т.к. все гипотезы — замкнутые) из следуюшей выводимости:
$$\forall x(C^*(x) \to B^*(x)), \forall x C^*(x) \vdash \forall x B^*(x).$$
А это доказывается непосредственно:

  1. $\forall x(C^*(x) \to B^*(x))$ — гипотеза.
  2. $\forall x(C^*(x) \to B^*(x)) \to (C^*(a) \to B^*(a))$ — аксиома II.1 из PC.
  3. $C^*(a) \to B^*(a)$ — 1, 2, MP.
  4. $\forall x C^*(x)$ — гипотеза.
  5. $\forall x C^*(x) \to C^*(a)$ — аксиома II.1 из PC.
  6. $C^*(a)$ — 4, 5, MP.
  7. $B^*(a)$ — 3, 6, MP.
  8. $\forall x B^*(x)$ — 7, Gen.

- Пусть $A = (\Box B \to B)$. Тогда $A^* = \forall x B^*(x) \to B^*(a)$ — аксиома.

- $A = (\Box B \to \Box\Box B)$. Тогда $A^* = (\forall x B^*(x) \to \forall y \forall x B^*(x))$ получается с помощью правила Бернайса из $\forall x B^*(x) \to \forall x B^*(x)$ (примера тавтологии — см. лемму 11.2).

- $A = (\Diamond\Box B \to \Box B)$. Тогда $A^* = (\exists y \forall x B^*(x) \to \forall x B^*(x))$ получается из $\forall x B^*(x) \to \forall x B^*(x)$ с помощью второго правила Бернайса.

- A получается по MP из B, $B \to A$. По предположению индукции,
$$\vdash_{PC} B^*,\ B^* \to A^*.$$
Тогда $\vdash_{PC} A^*$ по MP.

- $A = \Box B$ получается по Nec из B. Тогда $A^* = \forall x B^*(x)$. По предположению индукции, $\vdash_{PC} B^*(a)$. Отсюда $\vdash_{PC} A^*$ по Gen.

$(2 \Rightarrow 3)$. Это следует из теоремы корректности для PC.

$(3 \Rightarrow 4)$, $(5 \Rightarrow 6)$ очевидны.

$(4 \Rightarrow 6)$. Получается из леммы 12.7.[1]

$(3 \Rightarrow 5)$. Получается из леммы 12.7.

$(6 \Rightarrow 1)$. Это — теорема о полноте $S5$ относительно конечных моделей Крипке. Ее доказательство занимает всю оставшуюся часть лекции.

Определение 1. *Модальные формулы A, B* доказуемо эквивалентны *в $S5$, если $\vdash_{S5} A \leftrightarrow B$. Обозначение: $A \equiv_{S5} B$.*

Далее мы будем опускать индекс $S5$.

Лемма 13.2. *(Некоторые синтаксические свойства $S5$)*

(1) Допустимы правила монотонности

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}\,,\quad \frac{A \to B}{\Diamond A \to \Diamond B}\,.$$

(2) $\equiv$ задает отношение эквивалентности на MFm.

(3) $\equiv$ согласовано со всеми связками:
если $A \equiv A'$, то $\Box A \equiv \Box A'$, $\neg A \equiv \neg A'$;
если $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$, то $(A \circ B) \equiv (A' \circ B')$ для $\circ = \vee, \wedge, \to$.

(4) Если — подформула формулы B и $A \equiv A'$, то замена вхождения A на A' в B даст эквивалентную формулу: $B(...A...) \equiv B(...A'...)$.

(5) $\Diamond(A \vee B) \equiv \Diamond A \vee \Diamond B$.

(6) $\Diamond(A \wedge \Diamond B) \equiv \Diamond A \wedge \Diamond B$.

(7) $\Diamond(A \wedge \Box B) \equiv \Diamond A \wedge \Box B$.

(8) $\Box(A \wedge B) \equiv \Box A \wedge \Box B$.

Доказательство (не слишком трудное) опускаем.

Определение 2. *Модальные формулы* глубины 1 *определяются по индукции:*

[1] $W \vDash A^*$ означает то же, что $W \vDash \forall x[x/a]A^*(a)$.

- *P_i — глубины 1,*
- *если A — глубины 1, то $\neg A$ — глубины 1,*
- *если A, B — глубины 1, то $A \circ B$ — глубины 1 для $\circ = \vee, \wedge, \to$.*
- *если $A \in Fm$ (классическая формула), то $\Diamond A$ — глубины 1.*

Лемма 13.3. *(о нормальной форме для формул глубины 1). Если A — глубины 1, то $A \equiv \bigvee\limits_i A_i$, где A_i — вида $\bigwedge\limits_j Q_{ij}$, а каждое Q_{ij} — либо литерал, либо формула вида $\Diamond D$ или $\neg\Diamond D$, где D — классическая.*

Доказательство Из определения 2 следует, что формула имеет вид $B(P_1, \ldots, P_n, \Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m)$, где $B(P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{n+m})$ и $C_1, \ldots, \Diamond C_m$ — классические формулы. (Это легко доказывается по индукции.)

Формулу B можно привести к СДНФ: $B \sim \bigvee\limits_i B_i$, где B_i — элементарные конъюнкции. По теореме полноты для CL тогда

$$\vdash_{CL} B \leftrightarrow \bigvee_i B_i.$$

Тогда, подставив формулы $\Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m$ вместо $P_{n+1}, \ldots, P_{n+m}$ в этот вывод, получим

$$\vdash_{S5} A \leftrightarrow \bigvee_i A_i,$$

где $A_i = B_i(P_1, \ldots, P_n, \Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m)$. Поскольку B_i — элементарная конъюнкция, A_i окажется конъюнкцией формул $P_1, \ldots, P_n, \Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m$ или их отрицаний, что и требовалось. ∎

Лемма 13.4. *Существует лишь конечное число попарно не эквивалентных формул глубины 1 от переменных $P_1, \ldots, P_n$.*

Доказательство Достаточно рассмотреть нормальные формы из предыдущей леммы.

С точностью до $\equiv$, имеется конечное число конъюнкций A_i. Действительно, каждая из них содержит литералы от $P_1, \ldots, P_n$ и формулы вида $\Diamond D$, $\neg D$, где D — классическая формула от $P_1, \ldots, P_n$. Такие формулы D приводятся к СДНФ в CL, и тем более, в $S5$. И если $D \equiv D'$, то $\Diamond D \equiv \Diamond D'$, $\neg\Diamond D \equiv \neg\Diamond D'$ — по лемме 13.2.

Из конечного числа A_i можно построить лишь конечное число их дизъюнкций с точностью до $\equiv$ (здесь снова пользуемся леммой 13.2). ∎

Лемма 13.5. *В $S5$ всякая формула эквивалентна формуле глубины 1 (от тех же переменных).*

Доказательство Запишем эквивалентную формулу, используя связку $\Diamond$ вместо $\Box$ (это можно сделать, т.к. $\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$). Далее рассуждаем индукцией по длине формулы.

Нетривиален только шаг индукции для формулы вида $\Diamond A$. По предположению индукции, A эквивалентна формуле глубины 1, и значит, нормальной форме из леммы 13.3. Тогда $\Diamond A \equiv \bigvee\limits_i \Diamond A_i$ (лемма 13.2 (5),(3)).

Рассмотрим $\Diamond A_i = \Diamond \bigwedge\limits_j Q_{ij}$. Используя лемму 13.2 (6),(7) (и эквивалентность $\neg\Diamond D \equiv \Box\neg D$), преобразуем эту формулу в конъюнкцию формул вида $\Diamond P_k$, $\Diamond D$, $\Box D$ (где D — классическая), т.е. в формулу глубины 1. ■

Из лемм 13.4, 13.5 получаем

Предложение 13.6. *(о локальной табличности $S5$)*

Существует конечное число формул от переменных $P_1, \ldots, P_n$, попарно не эквивалентных в $S5$.

Упражнение Оцените количество этих формул в зависимости от n.

Определение 3. *Для множества модальных формул* Γ выводимость *формулы A, (обозначение: $\Gamma \vdash_{S5} A$) означает, что существует вывод A с использованием формул из Γ, аксиом $S5$ и правила MP (но не Gen).*

Γ противоречиво в S5, *если $\Gamma \vdash_{S5} A, \neg A$ для некоторой формулы A.*

Легко видеть, что для этой выводимости сохраняются лемма 5.4 и теорема дедукции 4.4.

Пусть Φ — множество всех модальных формул от $P_1, \ldots, P_n$. Рассматриваем непротиворечивые (в $S5$) подмножества Φ.

Определение 4. *Множество $\Gamma \subseteq \Phi$ называется* максимальным*), если оно непротиворечиво, а всякое его собственное расширение внутри Φ противоречиво.*

Лемма 13.7. *Всякое непротиворечивое множество содержится в максимальном.*

Доказательство Если Γ непротиворечиво, но не максимально, то найдется A такая, что $\Gamma \cup \{A\}$ непротиворечиво. Тогда и $\Gamma \cup \{A' \in \Phi \mid A' \equiv A\}$ непротиворечиво. Действительно, если противоречие выводится из

$\Gamma, A, A'_1, \ldots, A'_k$ и все A'_i эквивалентны A, то оно выводится уже из $\Gamma \cup \{A\}$ — поскольку $\vdash_{S5} A \to A'_i$, а тогда $\Gamma \cup \{A\} \vdash A'_i$ (по MP).

Если же мы будем расширять Γ, добавляя вместе с каждой формулой все эквивалентные ей, то за конечное число шагов мы получим все Φ — это следует из локальной табличности $S5$. Значит, за (меньшее) конечное число таких шагов мы можем получить максимальное множество. ■

Лемма 13.8. *(свойства максимальных множеств)*

Для максимального Γ *сохраняются свойства из леммы 5.6:*

(0) $\Gamma \vdash B \Rightarrow B \in \Gamma$ *(для* $B \in \Phi$*);*

(1) $\neg B \in \Gamma \Leftrightarrow B \notin \Gamma$*;*

(2) $(B \wedge C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma$ *и* $C \in \Gamma)$*;*

(3) $(B \vee C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \in \Gamma$ *или* $C \in \Gamma)$*;*

(4) $(B \to C) \in \Gamma \Leftrightarrow (B \notin \Gamma$ *или* $C \in \Gamma)$*.*

Определение 5. *Определим отношение достижимости на максимальных множествах:*

$$\Gamma R \Delta := \forall A\, (\Box A \in \Gamma \Rightarrow A \in \Delta).$$

Лемма 13.9. R *— отношение экавивалентности.*

Доказательство

- Рефлексивность.

  Пусть $\Box A \in \Gamma$. Т.к. $\Box A \to A$ — аксиома S5, она лежит в Γ (лемма 13.8 (0)). Тогда $\Gamma \vdash A$ по MP, а потому $A \in \Gamma$ (опять по 13.8 (0)). По определению R имеем $\Gamma R \Gamma$.

- Транзитивность.

  Предположим $\Gamma\, R\, \Delta\, R\, \Xi$ и докажем $\Gamma\, R\, \Xi$.

  Пусть $\Box A \in \Gamma$. Т.к. $\Box A \to \Box\Box A$ — аксиома S5, она лежит в Γ. Тогда $\Gamma \vdash \Box\Box A$ по MP, а потому $\Box\Box A \in \Gamma$. Теперь из $\Gamma R \Delta$ получаем, что $\Box A \in \Delta$. И из $\Delta\, R\, \Xi$ — что $A \in \Xi$.

- Симметричность.

  Предположим $\Gamma R \Delta$ и докажем $\Delta R \Gamma$.

Пусть $\Box A \in \Delta$. Тогда $\Diamond\Box A = \neg\Box\neg\Box A \in \Gamma$. В самом деле, иначе $\Box\neg\Box A \in \Gamma$ (лемма 13.8(1)). А тогда $\neg\Box A \in \Delta$ (т.к. $\Gamma R \Delta$), что дает противоречие в Δ.

Таким образом, $\Diamond\Box A \in \Gamma$. Кроме того, $(\Diamond\Box A \to A) \in \Gamma$ — это аксиома $S5$. Отсюда по MP и 13.8(0) получаем $A \in \Gamma$, что и требовалось.

■

Доказываем теперь импликацию $6 \Rightarrow 1$ из теоремы 13.1: для данной формулы A, не выводимой в $S5$, построим опровергающую конечную модель Крипке.

Т.к. $\nvdash_{S5} A$, множество $\{\neg A\}$ непротиворечиво. По лемме 13.7 построим максимальное множество Γ, содержащее $\neg A$. Пусть

$$W := \{\Delta \mid \Gamma R \Delta\}.$$

Из предложения 13.6 и леммы 13.8 следует, что W конечно. Зададим оценку на W:

$$\theta(P_i) := \{\Delta \mid P_i \in \Delta\}$$

и рассмотрим модель Крипке $M := (W, \theta)$.

Лемма 13.10. *(основная лемма)*

$$M, \Delta \models B \Leftrightarrow B \in \Delta$$

для всех $B(P_1, \ldots, P_n)$ и $\Delta \in W$.

Доказательство Индукция по длине B.

- B — переменная. Тогда утверждение верно по определению θ.
- $B = (C \vee D)$. Тогда по определению 5 лекции 12, предположению индукции и лемме 13.8 (3)

  $$M, \Delta \models B \Leftrightarrow (M, \Delta \models C \text{ или } M, \Delta \models D) \Leftrightarrow (C \in \Delta \text{ или } D \in \Delta)$$

  $$\Leftrightarrow (C \vee D) \in \Delta,$$

  что и требовалось.
- Случаи связок $\wedge, \to, \neg$ разбираются аналогично (упражнение).

- $B = \Box C$. Проверим эквивалентность

$$M, \Delta \models \Box C \Leftrightarrow \Box C \in \Delta.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\Box C \in \Delta$. Чтобы доказать $M, \Delta \models \Box C$, рассмотрим $\Psi \in W$. Поскольку R — отношение эквивалентности и $\Gamma R \Delta$, $\Gamma R \Psi$, получаем $\Delta R \Psi$. Тогда $C \in \Psi$ (по определению R). Отсюда $M, \Psi \models C$, по предположению индукции.

($\Rightarrow$) Предположим $\Box C \notin \Delta$ и докажем $M, \Delta \not\models \Box C$. Для этого надо построить $\Psi \in W$ такое, что $M, \Psi \not\models C$.

Рассмотрим множество

$$V := \{D \mid \Box D \in \Delta\} \cup \{\neg C\}.$$

Покажем, что V непротиворечиво. Действительно, иначе бы (по лемме 5.4)

$$D_1, \ldots, D_k \vdash_{S5} C$$

для некоторых $D_1, \ldots, D_k$, где $\Box D_1, \ldots, \Box D_k \in \Delta$. Тогда по теореме дедукции

$$\vdash_{S5} \bigwedge_i D_i \to C,$$

откуда по правилу монотонности

$$(*) \qquad \vdash_{S5} \Box(\bigwedge_i D_i) \to \Box C.$$

Но по лемме 13.2 (8) (многократно)

$$\Box(\bigwedge_i D_i) \equiv \bigwedge_i \Box D_i.$$

Вспоминая, что $\Box D_i \in \Delta$, получаем $(\bigwedge_i \Box D_i) \in \Delta$ по лемме 13.8. Из той же леммы следует, что максимальное множество содержит вместе с каждой формулой и все ей эквивалентные. Поэтому $\Box(\bigwedge_i D_i) \in \Delta$, и из (*) по MP следует $\Box C \in \Delta$. Это противоречит исходному предположению.

Итак, V непротиворечиво. Выберем максимальное Ψ, содержащее V. Из определения V получается: $\Delta R \Psi$, $C \notin \Psi$ (т.к. $\neg C \in \Psi$). Тогда:

$\Gamma R \Psi$ по транзитивности R (т.е. $\Psi \in W$),

$M, \Psi \not\models C$ по предположению индукции, т.к. $C \notin \Psi$.

■

Наконец, из леммы 13.10 следует $W \not\models A$, что и требовалось. ■