Введение в математическую логику
(осень 2018)

В.Б. Шехтман

Лекция 14

Полнота исчисления предикатов и ее следствия

Мощностью сигнатуры Ω (обозначение: $|\Omega|$) назовем мощность[1] множества всех ее символов, т.е. множества $Pred_\Omega \cup Const_\Omega \cup Fun_\Omega$.

Теорема 14.1. *(о существовании модели)*

(1) Пусть T — непротиворечивая теория без равенства в сигнатуре Ω. Тогда T имеет модель мощности $|\Omega|$ или счетную, если Ω конечна.

(2) Пусть T — непротиворечивая теория с равенством в сигнатуре Ω. Тогда T имеет нормальную модель мощности $\leq |\Omega|$ или не более, чем счетную, если Ω конечна.

Доказательство Утверждение (1) в этом курсе не доказывается.

(2) получается из (1) следующим образом.

Напомним, что непротиворечивость теории с равенством T понимается относительно $PC_\Omega^{=}$, т.е. как непротиворечивость теории $T \cup Eq_\Omega$ относительно PC_Ω. Согласно (1), $T \cup Eq_\Omega$ имеет модель M мощности $|\Omega|$ (или счетную). По лемме о нормализации (теорема 9.1), $M \equiv \widetilde{M}$, где $\widetilde{M}$ — нормальная модель с носителем $\underline{M}/\approx$. Тогда $|\widetilde{M}| \leq |M|$.[2] Таким образом, $\widetilde{M}$ — модель T нужной мощности. ■

[1] Пока что мы опираемся на интуитивное представление о мощности; некоторое уточнение будет дано в конце лекции.

[2] Это один из вариантов аксиомы выбора, о чем упомянем в конце лекции.

Теорема 14.2. *(Гёделя о полноте)*

(1) Для теории T и замкнутой формулы A сигнатуры Ω

$$T \models A \Rightarrow T \vdash_{PC_\Omega} A.$$

(2) Для любой формулы A сигнатуры Ω

$$\models A \ \Rightarrow \vdash_{PC_\Omega} A.$$

($1^=$) Для теории с равенством T и замкнутой формулы A сигнатуры Ω

$$T \models_{норм} A \Rightarrow T \vdash_{PC_\Omega^=} A.$$

($2^=$) Для любой формулы A сигнатуры с равенством Ω

$$\models_{норм} A \ \Rightarrow \vdash_{PC_\Omega^=} A.$$

Доказательство (Не пишем индексы при $\vdash$.) (1) Если $T \nvdash A$, то $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива (по лемме 5.4; она переносится на предикатный случай). По теореме 14.1 эта теория выполнима, и значит, $T \not\models A$.

(2) По определению $\models A$ означает $\models \overline{\forall} A$. А в силу (1) для $T = \varnothing$ из $\models \overline{\forall} A$ следует $\vdash \overline{\forall} A$. Наконец, $\vdash \overline{\forall} A \to A$ (по аксиоме II.1 и правилу силлогизма). Тогда по MP получаем $\vdash A$.

($1^=$) Аналогично (1). Если $T \nvdash A$, то $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива в $PC_\Omega^=$, а потому нормально выполнима по теореме 14.1. Следовательно, $T \not\models_{\text{норм}} A$.

($2^=$) получается из ($1^=$) аналогично (2). ■

Далее мы рассматриваем опять только теории с равенством и нормальные модели.

Теорема 14.3. *(Гёделя — Мальцева о компактности) Если любое конечное подмножество теории T выполнимо, то и T выполнима.*

Доказательство Если все конечные подмножества T выполнимы, то они непротиворечивы (следствие 12.4). Тогда T непротиворечива (лемма 11.1) и следовательно, выполнима (теорема 14.1). ■

Теорема 14.4. *(Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности) Если теория в сигнатуре Ω выполнима, то она имеет модель мощности $\leq$* $\max(|\Omega|, \aleph_0)$.

Доказательство Если теория выполнима, то она непротиворечива (следствие 12.4). Тогда по теореме 14.1 она имеет модель нужной мощности. ■

Теорема 14.5. *(о повышении мощности)*

(1) Если теория имеет конечные модели неограниченной мощности, то она имеет и бесконечную модель.

(2) Если теория в сигнатуре Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модели любой бесконечной мощности $k \geq |\Omega|$.

Доказательство (1) Пусть T — данная теория. Согласно условию, для любого натурального n теория T имеет конечную модель мощности больше n.

Рассмотрим сигнатуру Ω^+, которая получается из Ω добавлением счетного множества новых констант $\{c_1, c_2, \ldots\}$. В этой сигнатуре построим теорию

$$T^+ := T \cup \{c_i \neq c_j \mid i < j\}.$$

Докажем, что T^+ выполнима. По теореме компактности достаточно доказать, что любая конечная $T' \subset T$ выполнима. В самом деле,

$$T' \subset T \cup \{c_i \neq c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

для некоторого n. Пусть M — модель теории T мощности $> n$. Превратим ее в модель M' сигнатуры Ω^+, добавив интерпретацию констант $c_1, \ldots, c_n$ какими-нибудь различными элементами, а остальных новых констант — как угодно. Тогда $M' \vDash T \cup \{c_i \neq c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, и подавно $M' \vDash T'$.

Итак, T^+ выполнима. Если $M^+ \vDash T^+$, то $M^+ \vDash T$, и она бесконечна, т.к. все ее элементы $(c_i)_{M^+}$ различны. Рассматривая M^+ в сигнатуре Ω, получаем бесконечную модель теории T.

(2) Аналогично (1), рассмотрим сигнатуру Ω^+ с множеством новых констант $\{c_i \mid i \in k\}$, где k — данная бесконечная мощность. В этой сигнатуре построим теорию

$$T^+ := T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in k;\ i \neq j\}.$$

Любая конечная $T' \subset T^+$ содержится в некоторой теории

$$T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in I\},$$

где I — конечное подмножество k. Последняя теория выполнима в бесконечной модели теории T, с интерпретацией констант c_i для $i \in I$ какими-нибудь различными элементами, а остальных новых констант — произвольно. Тогда по теореме компактности T^+ выполнима.

Из теории множеств следует, что $|\Omega^+| = k$.[3] По теореме 14.4 T^+ имеет модель M^+ мощности $\leq k$. В этой модели интерпретации всех констант c_i различны (см. определение T^+), поэтому ее мощность $\geq k$. Значит, $|M^+| = k$. Рассматривая M^+ в сигнатуре Ω, получим модель T мощности k. ■

Дополнительные замечания Из теоремы о повышении мощности следует такой факт:

Признак полноты Лося — Вота *Пусть T — теория в конечной или счетной сигнатуре, не имеющая конечных моделей. Если k — бесконечная мощность и все модели T мощности k изоморфны, то T полна.*

Доказательство — упражнение для читателя.

О нестандартных моделях арифметики

Пусть $\mathbf{N}$ — стандартная модель PA (см. лекцию 12).

Теорема 14.6. *Существует счетная модель M такая, что $M \equiv \mathbf{N}$, но $M \ncong \mathbf{N}$.*

Доказательство Построим теорию в сигнатуре PA с дополнительной новой константой c.

$$T := Th(\mathbf{N}) \cup \{c \neq 0,\ c \neq 1, \ldots,\ c \neq \underline{n}, \ldots\},$$

где $\underline{n}$ обозначает терм $\underbrace{1 + (1 + (1 + ..))}_{\text{n раз}}$.

В стандартной модели, очевидно, имеем $|\underline{n}|_{\mathbf{N}} = n$.

Как и в предыдущих теоремах, докажем выполнимость T, используя компактность. Для этого рассмотрим

$$T_n := Th(\mathbf{N}) \cup \{c \neq 0,\ c \neq 1, \ldots,\ c \neq \underline{n}\}.$$

Пусть M_n — модель $\mathbf{N}$ с интерпретацией $c_{M'} := n+1$. Тогда $M_n \models T_n$. Таким образом, любая T_n выполнима.

По компактности, T выполнима, а по теореме Лёвенгейма — Сколема, она имеет не более, чем счетную модель M^+.

Заметим, что $M^+ \models Th(\mathbf{N})$ и $\mathbf{N} \models \underline{m} \neq \underline{n}$ при $m \neq n$. Поэтому и $M^+ \models \underline{m} \neq \underline{n}$ при $m \neq n$. Значит, M^+ бесконечна, и следовательно, счетна.

[3]Здесь мы используем следующий факт: если $|X| \leq |Y|$, то $|X \cup Y| = |Y|$. Чтобы его доказать, нужна аксиома выбора.

Кроме того, для всех n, $M^+ \vDash c \neq \underline{n}$, или[4]

$$M^+ \vDash c_{M^+} \neq \underline{n}.$$

Рассмотрим теперь M^+ в исходной сигнатуре арифметики. Обозначим эту модель через M. Имеем:

$$(*) \qquad M \vDash c_{M^+} \neq \underline{n}$$

для всех n, а также $M \vDash Th(\mathbf{N})$, т.е. $M \equiv \mathbf{N}$.

Наконец, докажем, что $M \ncong \mathbf{N}$. Предположим противное, и пусть $\alpha : M \cong \mathbf{N}$. Из $(*)$ по теореме 7.4 получаем

$$\mathbf{N} \vDash \alpha(c_{M^+}) \neq \underline{n},$$

т.е.

$$\alpha(c_{M^+}) \neq |\underline{n}|_{\mathbf{N}}.$$

Но $|\underline{n}|_{\mathbf{N}} = n$, т.е. $\alpha(c_{M^+})$ не равно никакому натуральному числу. Противоречие. ■

Замечание Можно показать, что в модели новые элементы — бесконечно большие, т.е. больше всех натуральных чисел (упражнение).

Наивная теория множеств

Будем строить аксиоматику теории множеств в сигнатуре с двумя двуместными предикатными символами $\in, =$.

Рассмотрим сначала теорию $\mathcal{N}$ (“наивную теорию множеств”) со следующими аксиомами.

(1) (аксиома объемности)

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

(2) (схема аксиом свертывания)

$$\overline{\forall}\, \exists y \forall x\, (x \in y \leftrightarrow A(x, \ldots)).$$

Здесь $A(x, \ldots)$ — произвольная формула, в которой один параметр (например, a) заменен на связанную переменную x. Отметим, что y не входит в A.

[4] c_{M^+} — это элемент модели, а потому оцененный терм.

Смысл аксиомы объемности: если 2 множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны.

Смысл аксиомы свертывания: существует множество y, состоящее из всех x, обладающих свойством A, т.е. $y = \{x \mid A(x, \ldots)\}$.

Предложение 14.7. *Теория $\mathcal{N}$ противоречива.*

Доказательство

Выведем противоречие в $\mathcal{N}$; это доказательство — формализация парадокса Рассела.

1. $\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \notin x) \to (a \in a \leftrightarrow a \notin a)$ — аксиома II.1 исчисления предикатов.

2. $(a \in a \leftrightarrow a \notin a) \to \exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ — аксиома II.2 исчисления предикатов.

3. $\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \notin x) \to \exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ — по правилу силлогизма из 1, 2.

4. $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x) \to \exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ — 3, второе правило Бернайса.

5. $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$ — аксиома свертывания для $(a \notin a)$.

6. $\exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ — 4, 5, MP.

7. $(A \leftrightarrow \neg A) \to B \wedge \neg B$ — подстановочный пример тавтологии (с любыми A, B). В частности,

$$(a \in a \leftrightarrow a \notin a) \to B \wedge \neg B,$$

где B — любая замкнутая формула.

8. $\exists y\,(y \in y \leftrightarrow y \notin y) \to B \wedge \neg B$ — 7, второе правило Бернайса.

9. $B \wedge \neg B$ — 6, 8, MP. ∎

Теория множеств Цермело

Самая известная аксиоматическая теория множеств — это теория Цермело – Френкеля с аксиомой выбора (ZFC). В этом курсе мы рассмотрим очень кратко более слабую теорию Цермело (Z). [5]

Сигнатура теории Z состоит из $\in, =$. Ее аксиомы — это аксиома объемности, некоторые варианты аксиомы свертывания и еще 2 особые аксиомы (бесконечности и выбора).

1. Аксиома объемности — такая же, как в $\mathcal{N}$:

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

[5]См. также лекции Л.Д. Беклемишева "Аксиомы теории множеств" на http://www.mi-ras.ru/ bekl/logic2013.html

Введем обозначение

$$a \subseteq b := \forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

("a — подмножество b"). Вот равносильная формулировка аксиомы объемности:

$$\forall x \forall y\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x = y).$$

2. Аксиома пары.

$$\forall x \forall y \exists z \forall u\,(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)).$$

Смысл этой аксиомы: для всех x, y можно построить множество $z = \{x, y\}$ (неупорядоченную пару). Если $x = y$, то получается множество $\{x, x\}$, которое обозначается просто $\{x\}$; это множество состоит из 1 элемента x.

Имея неупорядоченные пары, можно определить упорядоченные пары (по Куратовскому):

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

<u>Лемма</u> (в теории с аксиомами 1,2)

$$\vdash \overline{\forall}((x, y) = (x', y') \to x = x' \wedge y = y')).$$

3. Аксиома объединения.

$$\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists u\,(z \in u \wedge u \in x)).$$

Т.е. $y = \{z \mid \exists u\,(z \in u \wedge u \in x)\}$. Такое y называется *объединением множества* x и обозначается $\bigcup x$.

Теперь можем определить:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\},$$

$$\{x, y, z\} := \{x, y\} \cup \{z\}$$

и т.п.

4. Аксиома степени.

$$\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Т.е. $y = \{z \mid z \subseteq x\}$ — множество всех подмножеств x. Оно обычно обозначается $\mathcal{P}(x)$.

5. Схема аксиом выделения — ослабленный вариант свертывания.

$$\overline{\forall}\,\forall x \exists y \forall z\,(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge A(z, \ldots))).$$

В этой теории мы не можем строить произвольные множества вида $\{x \mid A(x, \ldots)\}$. Однако неформально можно рассматривать такие совокупности (*классы*). Некоторые классы заведомо не являются множествами (они называются *собственными*). Например $R := \{x \mid x \notin x\}$ — собственный класс; в нашей теории это доказывается, см. предыдущий раздел.

Аксиома выделения утверждает, что пересечение любого класса $\{z \mid A(z, \ldots)\}$ с любым множеством x — множество. Или: подкласс любого множества — множество.

Предложение 14.8. *(1) (существование пустого множества)*

$Z \vdash \exists y \forall x\, x \notin y.$

(2) Пусть $V := \{x \mid x = x\}$ — класс всех множеств. Тогда

$$Z \vdash (V \text{ — собственный класс}).$$

Доказательство (1) Существует хотя бы одно множество, формально: $\vdash_{PC^=} \exists x(x = x)$. Это получается из аксиомы равенства $\forall x(x = x)$ и теоремы $\forall x A \to \exists x A$, которую легко доказать (упражнение).

Взяв это x, по аксиоме выделения построим

$$y := \{z \mid z \in x \wedge z \neq z\}.$$

Очевидно, что y пусто.

(2) Очевидно, что $R \subseteq V$. По аксиоме выделения, если V — множество, то и R — множество. ∎

Из аксиомы объемности следует, что все пустые множества равны. Поэтому можно ввести обозначение $\varnothing$.

Теперь мы можем последовательно (по индукции) определить натуральные числа:

$$0 := \varnothing,\ 1 := \{0\},\ 2 := \{0, 1\}, \ldots,\ n + 1 := n \cup \{n\}, \ldots$$

(определение фон Неймана). Т.е. получается $n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Однако для построения множества всех натуральных чисел нужна дополнительная аксиома.

6. Аксиома бесконечности.

$$\exists x\, (0 \in x \wedge \forall y\, (y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x)).$$

Множество x назовем *индуктивным*, если оно имеет свойства, указанные в этой аксиоме, т.е. содержит 0 и вместе с каждым y содержит '$y+1$'. Аксиома утверждает, что существует индуктивное множество. Теперь можно определить множество натуральных чисел ω как наименьшее индуктивное множество:

$$\omega := \{y \mid \forall x\,(x \text{ индуктивно } \to y \in x)\}.$$

Этот класс — действительно множество по аксиоме выделения, т.к. $\omega \subseteq x_0$ для индуктивного множества x_0 (какого-то, которое существует по аксиоме бесконечности).

Дальше можно развивать арифметику в ω и в частности, превратить его в модель PA.

Также можно определить декартово произведение (и доказать в Z, что оно всегда существует):

$$a \times b := \{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in b\}.$$

Затем определяем

$$f \text{ — функция} := \forall z(z \in f \to \exists x \exists y\, z = (x,y)).$$

После этого можно определить формулы (упражнение)

[f — биекция a на b]

и

[f — инъекция a в b]

и сравнение множеств по мощности:

$$a \sim b := \exists f\,[f\text{— биекция } a \text{ на } b],$$

$$a \preceq b := \exists f\,[f\text{— инъекция } a \text{ в } b].$$

Предложение 14.9. *(1) $\sim$ задает отношение эквивалентности (на классе всех множеств V).*

(2) $\preceq$ задает рефлексивное и транзитивное отношение на V.

Доказательство — нетрудное рассуждение, которое формализуется в Z.

Теорема 14.10. *(Теорема Кантора – Бернштейна)*

$$Z \vdash \forall x \forall y\,(x \preceq y \wedge y \preceq x \to x \sim y).$$

Доказательство опускаем.[6]

Теперь можем записывать $a \sim b$ как $|a| = |b|$ (мощность a равна мощности b), а $a \preceq b$ как $|a| \leq |b|$ (мощность a меньше или равна мощности b), не уточняя при этом само понятие "мощность".

Теорема 14.11. *(Теорема Кантора)*

$$Z \vdash \forall x \, |x| < |\mathcal{P}(x)|.$$

Доказательство Имеется инъекция x в $\mathcal{P}(x)$: она отображает каждый $a \in x$ в $\{a\}$.

$x \not\sim \mathcal{P}(x)$ доказывается от противного.[7]

Предположим, что $f : x \longrightarrow \mathcal{P}(x)$ — биекция. Тогда для некоторого $y \in x$

$$\{z \in x \mid z \notin f(z)\} = f(y).$$

Поэтому для всех $z \in x$

$$z \in f(y) \leftrightarrow z \notin f(z).$$

Тогда

$$y \in f(y) \leftrightarrow y \notin f(y).$$

Противоречие. ■

7. Аксиома выбора. Запишем ее (не совсем формально) в двух вариантах.

(I) Если x — непустое множество попарно не пересекающихся непустых множеств (разбиение), то

$$\exists y \forall z \, (z \in x \to |z \cap y| = 1)).$$

(II) Если существует отображение x на y (сюръекция), то $|y| \leq |x|$.

Из аксиомы выбора следует теорема о сравнении мощностей:

$$\forall x \forall y \, (|x| \leq |y| \vee |y \leq |x|).$$

Кроме того, явно определяются "мощности" — это множества специального вида (кардиналы).

Другое известное следствие аксиомы выбора — лемма Цорна. Она утверждает, что если в частично упорядоченном множестве X каждая цепь (линейно упорядоченное подмножество) ограничена сверху, то X имеет максимальный элемент.

[6] Содержательное доказательство можно найти, например, в книге Н.К. Верещагина и А.Х. Шеня "Начала теории множеств".

[7] Рассуждение похоже на парадокс Рассела. В истории было наоборот: теорема Кантора появилась раньше.