Факультатив по матлогике и теории алгоритмов
`http://lpcs.math.msu.su/vml2020/`

Теория множеств

1. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \subseteq B$, $B \nsubseteq C$ и $A \subseteq C$?

2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$?

3. **а)** Постройте вложение (инъекцию) $\mathbb{Q}$ в $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. **б)** Постройте вложение $(\mathbb{Q}, <)$ в $(\mathcal{P}(\mathbb{Q}), \subset)$.

4. Существуют ли такие множества A, B, C, D и функция $f\colon A \to D$, что $B \cup C \subseteq A$ и $f(B) \cap f(C) \neq f(B \cap C)$?

5. Можно ли устроить так, что существует только одно множество и при этом часть аксиом теории множеств Цермело—Френкеля ложны и часть истинны, а аксиома пары окажется среди истинных?

6. Рассмотрим ситуацию, когда вообще существует только одно множество и оно пусто. При этом часть аксиом теории множеств Цермело—Френкеля оказываются ложными и часть истинными. Истинна ли в таком случае **а)** аксиома равенства? **б)** аксиома объединения? **в)** аксиома степени? **г)** аксиома бесконечности?

Аксиомы теории множеств Цермело — Френкеля

1. **(Аксиома равенства)**
   Равные множества x и y являются элементами одних и тех же множеств.

2. **(Аксиома пары)**
   Для любых множеств x и y найдется множество $z = \{x, y\}$, элементами которого являются в точности x и y.

3. **(Схема аксиом выделения)**
   Для любого свойства $\varphi(x)$ и множества X найдется множество $Y = \{x \in X \mid \varphi(x)\}$, содержащее те и только те элементы $x \in X$, которые удовлетворяют свойству φ.

4. **(Аксиома объединения)**
   Для любого множества X существует множество $Y = \bigcup X$, содержащее в точности те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из элементов множества X.

5. **(Аксиома степени)**
   Для любого множества X существует множество $Y = \mathcal{P}(X)$ всех его подмножеств.

6. **(Аксиома бесконечности)**
   Существует множество S такое, что $\varnothing \in S$ и для любого $x \in S$ оно содержит множество $x \cup \{x\} \in S$.

7. **(Аксиома регулярности)**
   Всякое непустое множество X имеет элемент $a \in X$ такой, что $\forall x \in X\ x \notin a$.

8. **(Схема аксиом подстановки)**
   Пусть $\varphi(x, y)$ — такое свойство, что для любого x найдется не более одного y, удовлетворяющего $\varphi(x, y)$. Тогда для любого X найдется множество $Y = \{\, y \mid \exists x \in X\ \varphi(x, y) \,\}$.

9. **(Аксиома выбора)**
   *Для любого семейства непустых множеств S существует **функция выбора** на S, то есть такая функция f, что $f(x) \in x$ для всех $x \in S$.*