**Московский государственный университет**
**Механико-математический факультет**

2-й курс, осенний семестр
Вопросы к экзамену

1. Язык теории множеств. Равенство множеств. Аксиомы равенства, пары, объединения, степени, выделения.

2. Упорядоченные пары, декартово произведение, бинарные отношения между множествами. Сюръективность, инъективность, тотальность, функциональность бинарного отношения. Отношение эквивалентности, фактормножество.

3. Натуральные числа. Индуктивные множества, аксиома бесконечности. Формальное определение множества натуральных чисел. Принцип индукции.

4. Принципы порядковой индукции, наименьшего числа, принцип Дирихле. Их вывод из определения множества натуральных чисел.

5. Построение множеств целых, рациональных чисел в теории множеств. Дедекиндовы сечения, построение вещественных чисел в теории множеств. Полнота порядка на вещественной прямой.

6. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.

7. Сумма, произведение вполне упорядоченных множеств; их вполне упорядоченность.

8. Трансфинитная рекурсия вдоль данного вполне упорядоченного множества. Существование и единственность функции, определяемой трансфинитной рекурсией.

9. Доказать, не опираясь аксиому выбора: для любого множества $X$ существует вполне упорядоченное множество $S$, не вложимое в $X$.

10. Аксиома выбора. Лемма Цорна. Вывод леммы Цорна из аксиомы выбора.

11. Аксиома выбора. Лемма Цорна. Теорема Цермело. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Вывод аксиомы выбора из теоремы Цермело.

12. Формулы логики высказываний. Истинностное значение формулы при данной оценке пропозициональных переменных. Таблица истинности формулы. Алгоритм распознавания выполнимости.

13. Связь между формулами логики высказываний от $n$ переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.

14. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Свойство замены подформулы на равносильную.

15. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме. Единственность совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

16. Понятие сигнатуры и модели (алгебраической системы) данной сигнатуры. Примеры моделей: стандартная модель арифметики; евклидова плоскость в сигнатуре элементарной геометрии Тарского $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$; модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.

17. Язык логики предикатов первого порядка данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные, термы, формулы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.

18. Семантика логики предикатов первого порядка. Расширение сигнатуры данной модели константами. Значение замкнутого терма расширенной сигнатуры в данной модели. Истинностное значение замкнутой формулы расширенной сигнатуры в данной модели.

19. Предикаты и функции, выразимые в данной модели. Выразимость предиката параллельности прямых $ab \| cd$ в языке элементарной геометрии и формулировка аксиомы о параллельных.

20. Гомоморфизмы и изоморфизмы моделей. Теорема о сохранении истинностного значения формулы при изоморфизме. Автоморфизмы моделей, метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов. Описание автоморфизмов моделей $(\mathbb{Z}; \leq)$, $(\mathbb{R}^2; =, B)$ и $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ и примеры невыразимых предикатов в этих моделях.

21. Выполнимые формулы и множества формул языка первого порядка. Общезначимые и тождественно ложные формулы, их связь с выполнимыми формулами; примеры.

22. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Приведение формулы языка первого порядка к предварённой форме.

23. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Модель данной теории. Понятие выполнимой теории. Примеры теорий: теория строгих частичных порядков, теория отношения эквивалентности, теория простых графов.

24. Теории первого порядка с равенством. Нормальные модели. Теорема о существовании нормальной модели у выполнимой теории с равенством.

25. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость в теории, простейшие свойства выводимости. Доказуемые, опровержимые, независимые формулы для данной теории.

26. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

27. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

28. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства), её эквивалентные формулировки (с доказательством эквивалентности). Теорема Гёделя–Мальцева о компактности для логики предикатов.

29. Нестандартные модели арифметики, их существование. Понятие галактики. Описание отношения порядка на элементах данной галактики. Плотность порядка на множестве галактик.

30. Элементарная теория данной модели. Подмодель, элементарная подмодель данной модели. Теорема Лёвенгейма–Сколема (для счётной сигнатуры). Существование счётных моделей теории множеств ZFC, элементарных теорий полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и элементарной геометрии.

31. Бесконечная модель счётной сигнатуры имеет элементарное расширение любой большей мощности.

32. Машина Тьюринга. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча–Тьюринга.

33. Разрешимые множества. Свойства объединения, пересечения, дополнения разрешимых множеств.

34. Перечислимые множества. Теорема об эквивалентных определениях перечислимого множества.

35. Свойства пересечения и объединения перечислимых множеств. Теорема о графике вычислимой функции. Теорема Чёрча–Поста (критерий разрешимости).

36. Кодирование машин Тьюринга. Построение универсальной машины Тьюринга.

37. Универсальные функции. Построение универсальной вычислимой функции для класса всех одноместных вычислимых функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

38. Пример вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения.

39. Пример неразрешимого перечислимого множества. Алгоритмическая неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга.

40. Пример неотделимой пары перечислимых множеств.

41. Главные универсальные функции. Главность вычислимой универсальной функции, построенной по нумерации машин Тьюринга.

42. Задача распознавания свойств вычислимых функций по их программам. Теорема Успенского–Райса.