Логика предикатов
лекция 10

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

lbekl@yandex.ru

06.11.2020

Определимость в модели

Опр.

Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ называется *определимым в модели* $(M; \Sigma)$, если для некоторой формулы A языка $\mathcal{L}_\Sigma$ (со свободными переменными $b_1, \dots, b_n$) для любых $x_1, \dots, x_n \in M$

$$P(x_1, \dots, x_n) \iff M \vDash A[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n].$$

Общие вопросы

Для данной модели:

- Существуют ли невыразимые предикаты?
- Как можно доказать невыразимость данного предиката?

Простейший подход: *метод автоморфизма*.

Гомоморфизм моделей

Пусть M и M' — модели сигнатуры Σ.

Опр.

Гомоморфизм $\varphi : M \to M'$ есть отображение из M в M', сохраняющее все предикаты, функции и константы Σ, то есть

$\varphi : M \to M'$ — гомоморфизм, если для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ и $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ валентности n

$$\begin{array}{rcl} P_M(x_1, \dots, x_n) & \Rightarrow & P_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(f_M(x_1, \dots, x_n)) & = & f_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(c_M) & = & c_{M'} \end{array}$$

Предложение.

Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

Изоморфизм моделей

Опр.

Изоморфизм $\varphi : M \to M'$ есть гомоморфизм, у которого есть обратный, то есть гомоморфизм $\psi : M' \to M$ такой, что

$$\varphi \circ \psi = id_{M'}, \qquad \psi \circ \varphi = id_M,$$

где $id_M : M \to M$ — тождественный гомоморфизм $id_M(x) = x$.

Опр.

M и M' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M \to M'$.

Теорема.

Если $\varphi : M \to M'$ *— изоморфизм, то для любой формулы* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *и любых* $c_1, \ldots, c_n \in M$

$$M \vDash A[c_1, \ldots, c_n] \iff M' \vDash A[\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A.

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Автоморфизмом называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат $\leq$.

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет $\leq$: $0 \leq 1$, но $\varphi(0) \not\leq \varphi(1)$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

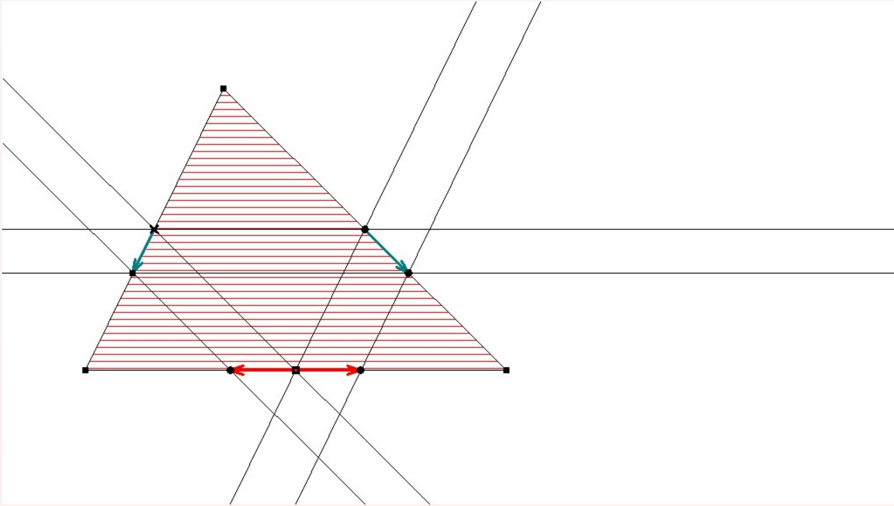
Автоморфизмы плоскости с отношением «между»

Пример.

Автоморфизмами модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ являются все взаимно однозначные аффинные преобразования плоскости и только они.

- Всякий автоморфизм переводит отрезки в отрезки.
- Всякий автоморфизм сохраняет параллельность прямых.
- Для любого автоморфизма φ существует аффинное преобразование h такое, что $\varphi \circ h$ сохраняет три точки общего положения.

- Если автоморфизм φ имеет три различные неподвижные точки, то $\varphi = id$.



Следствие.
В модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- предикат $\cong$;
- равенство углов.

Пример.

Автоморфизмы модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ есть все преобразования плоскости, являющиеся композицией гомотетии и движения.

- Предикаты B и $\cong$ сохраняются при движениях и гомотетиях.
- Аффинное преобразование, сохраняющее длины сторон некоторого треугольника, есть движение.

- Любой автоморфизм φ переводит равносторонний треугольник в (подобный ему) равносторонний.
- Для некоторой гомотетии h автоморфизм $\varphi \circ h$ сохраняет длины сторон заданного равностороннего треугольника.
- Значит, $\varphi \circ h$ — движение.

Следствие.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- единица длины;
- ориентация;
- направление «вдоль оси x».

Выполнимость и общезначимость

Опр.

Формула $A(b_1, \ldots, b_n)$ сигнатуры Σ *выполнима в модели* (M, Σ), если для некоторых констант $c_1, \ldots, c_n \in M$ предложение $A[b_1/\underline{c}_1, \ldots, b_n/\underline{c}_n]$ (сигнатуры $\Sigma(M)$) истинно.

Формула A сигнатуры Σ *выполнима*, если она выполнима в некоторой модели (M, Σ).

Опр.

Формула A *общезначима* (*тождественно истинна*), если $\neg A$ не выполнима.

Опр.

Формула A *тождественно ложна*, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a)$, $\exists x \forall y A(x,y) \to \forall y \exists x\, A(x,y)$ общезначимы. Формула $P(a_0) \to P(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Эквивалентность формул

Опр.

Формулы A и B равносильны (обозначение $A \equiv B$), если в любой модели M они определяют один и тот же предикат, то есть если $A_M = B_M$.

Утверждение.

$A \equiv B \iff$ *формула* $A \leftrightarrow B$ *общезначима.*

Основные равносильности с кванторами

$$
\begin{aligned}
\forall x\, A[a/x] &\equiv \forall y\, A[a/y] \\
\exists x\, A[a/x] &\equiv \exists y\, A[a/y] \\
(\forall x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Подстановка в логике предикатов

Стандартные факты:

- Допустимость правил подстановки и замены подформулы на эквивалентную
- Теорема о предварённой нормальной форме

Особенности:

- Более сложное понятие подстановки

Расширение языка пропозициональными переменными

- Обогатим язык логики первого порядка пропозициональными переменными. Можно считать переменную P нульместным предикатным символом.
- Распостраним на расширенный язык все синтаксические понятия, включая понятие формулы.
- Пропозициональные переменные считаются атомарными формулами.

Подстановка

Опр.

$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A.

Замечание.

$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x\,(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x\,(Q(x) \wedge \exists x R(x)) \ .$$

Лемма.

$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Опр.

Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C*, если выполнено условие предыдущей леммы.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ *и разрешена подстановка формул* A, B *вместо* P *в* C, *то* $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Замена связанной переменной

Лемма.
Пусть $y \in \mathsf{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.
Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B. Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Семантика расширенного языка

- Пропозициональная переменная P в модели M интерпретируется как логическая константа, то есть $P_M \in \mathbb{B}$.
- Считается $M \models P_M$, если $P_M = \text{И}$ и $M \not\models P_M$, если $P_M = \text{Л}$.
- Понятие общезначимой формулы распространяется на формулы расширенного языка.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P: $P_M = \text{И} \iff M \models f(C)$.

- Индукцией по построению формулы B проверим, что

$$(M, P) \models B \iff M \models B[P/C]$$

для любой формулы B, в которую разрешена подстановка C вместо P.

- Отсюда получаем $(M, P) \not\models A$.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $\mathsf{Q}x_1\mathsf{Q}x_2\ldots\mathsf{Q}x_nA_0[b_1/x_1,\ldots,b_n/x_n]$, где Q означает квантор $\forall$ или $\exists$, а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Доказательство.

Последовательно выносим кванторы наружу, используя основные эквивалентности и леммы о замене связанных переменных и о подстановке. Разбор алгоритма на семинарских занятиях.