Логика предикатов
лекция 12

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

lbekl@yandex.ru

20.11.2020

Теорема о дедукции

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$.
Теорию $T \cup \{A\}$ обозначаем также T, A или $T + A$.

Теорема.

Для любой теории T и замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \to B.$$

Доказательство.

Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$.

Если B является логической аксиомой или $B \in T$, то в T выводимо:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & \text{(тавтология)} \\ A \to B & \text{(MP)} \end{array}$$

Если $B = A$, то используем тавтологию $A \to A$.

Пусть B получена из C и $C \to B$ по modus ponens.

Имеем $T \vdash (A \to C)$ и $T \vdash (A \to (C \to B))$ по предположению индукции.

Соединяем эти два вывода и достраиваем так:

$$(A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B)) \quad \text{(тавтология)}$$

$$(A \to C) \to (A \to B) \quad \text{(MP)}$$

$$A \to B \quad \text{(MP)}$$

Допустим $B = (C \to \forall x D[a/x])$ получена из $C \to D$ по $R2$. По пр. индукции

$$T \vdash A \to (C \to D).$$

Надо построить вывод

$$T \vdash A \to (C \to \forall x D[a/x]).$$

Достраиваем вывод $A \to (C \to D)$ в T:

$$A \to (C \to D)$$

$$(A \to (C \to D)) \to (A \wedge C \to D) \quad \text{(тавтология)}$$

$$(A \wedge C) \to D \quad \text{(MP)}$$

$$(A \wedge C) \to \forall x D[a/x] \quad \text{(R2, } A \text{ замкнута)}$$

$$A \to (C \to \forall x D[a/x]) \quad \text{(аналогично)}$$

Правило $R3$ рассматривается аналогично.

Непротиворечивость теории

Опр.

Теория T *противоречива*, если существует A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*.

Следствие.

$T \cup \{A\}$ противоречива $\iff T \vdash \neg A$.

Теорема о корректности исчисления предикатов

Теорема.

Если $M \models T$ и $T \vdash A$, то $M \models A$.

Доказательство.

Индукция по длине вывода A в T.

Следствие.

Если $\vdash A$, то A общезначима.

Доказательства непротиворечивости

Следствие.
Если теория T имеет модель, то T непротиворечива.

Следствие.
Следующие теории непротиворечивы:

- исчисление предикатов (пустая теория);
- теория групп;
- элементарная геометрия;
- формальная арифметика;
- теория множеств(?).

Доказательства независимости

Следствие.

Если существует модель M теории T для которой $M \not\models A$, то $T \nvdash A$.

Пример.

Модель Пуанкаре H^2 показывает, что аксиома Евклида независима от остальных аксиом элементарной геометрии.

Теорема Гёделя о полноте

Теорема.

1. *Всякая непротиворечивая теория* T *выполнима, то есть имеет модель* $M \vDash T$.
2. *Если* $T \nvdash A$, *то найдётся модель* $M \vDash T$ *для которой* $M \nvDash A$.

Покажем равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Действительно, если $T, \neg A$ противоречива, то $T \vdash \neg\neg A$, а значит $T \vdash A$ (используем тавтологию $\neg\neg A \to A$). Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 1)$: Пусть T непротиворечива. Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvdash A$, следовательно у теории T должна быть модель (опровергающая A).

Теорема Гёделя–Мальцева о компактности

Теорема.

Теория T выполнима $\iff$ любое конечное подмножество $T_0 \subseteq T$ выполнимо.

Доказательство.

Если T невыполнима, то существует вывод противоречия в T, использующий лишь конечное число аксиом T.

Нестандартные модели арифметики

Пример.

Пусть $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ — стандартная модель арифметики и $Th(\mathbb{N})$ есть множество *всех* истинных в $\mathbb{N}$ предложений.

Добавим к сигнатуре новую константу c и рассмотрим теорию

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cup \{\neg c = 0, \neg c = S0, \neg c = SS0, \dots\}.$$

Терм $\bar{n} \rightleftharpoons SS\ldots S0$ (n раз) называем *нумералом*. Нумералы служат именами натуральных чисел.

Утверждение.

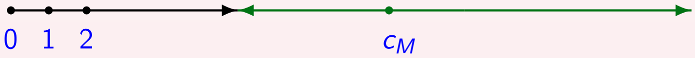
Каждая конечная подтеория $T_0 \subseteq T$ выполнима.

Доказательство.

T_0 содержит лишь конечное число аксиом вида $c \neq \bar{n}_1$, ..., $c \neq \bar{n}_k$. Интерпретируем константу c в стандартной модели как любое число $m > n_1, \ldots, n_k$.

По теореме о компактности существует (нормальная) модель $M \vDash T$. Модель M обладает следующими свойствами:

- $\mathbb{N}$ изоморфна начальному сегменту M; вложение $\mathbb{N} \to M$ задаётся функцией $\varphi : n \longmapsto \bar{n}_M$.
- $M \vDash Th(\mathbb{N})$;
- $M \ncong \mathbb{N}$, в частности $c_M \in M$ есть «бесконечно большое число», поскольку c_M отлично от всякого $n \in \mathbb{N}$.

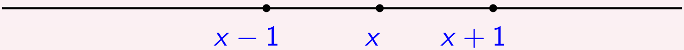


Порядок на модели M

Формула $a < b \rightleftharpoons \exists x\,(x \neq 0 \wedge a + x = b)$ определяет порядок в $\mathbb{N}$. Для данной формулы в $\mathbb{N}$ выполнены аксиомы строгого линейного порядка и следующие предложения:

- $\forall x\,(0 < x \vee 0 = x)$;
- $\forall x \exists y\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to z = x \vee z < x))$;
- $\forall y\,(y \neq 0 \to \exists x\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to$
  $\to z = x \vee z < x)))$.

Следовательно, те же аксиомы выполнены и в M. Поэтому предикат $<_M$ на M представляет собой строгий линейный порядок с наименьшим элементом 0. При этом каждый элемент имеет последователя, и каждый элемент, кроме 0, имеет непосредственного предшественника.



Опр.

Элементы $x, y \in M$ *близки*, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $y = SS\dots S(x)$ или $x = SS\dots S(y)$ (n символов S).

Классы эквивалентности по отношению близости называем *галактиками*.

Утверждение.

Если G — галактика в M, $G \neq \mathbb{N}$, то порядок $(G, <_M)$ изоморфен $(\mathbb{Z}, <)$.

Пусть $\mathcal{G}$ есть множество всех галактик в M. Определим $G_1 <_M G_2$, если для любых $x \in G_1$, $y \in G_2$ $x <_M y$.

Теорема.

Порядок $(\mathcal{G}, <_M)$ *есть плотный порядок без наибольшего элемента и с наименьшим элементом* $\mathbb{N}$.

Доказательство.

Если $G_1 < G_2$, возьмём чётные $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$ и рассмотрим $y = (x_1 + x_2)/2$ (функция $g(x) = x/2$ определима в $\mathbb{N}$, а значит и в M).

Если $y \in G_1$, то $(x_1 + x_2)/2 = x_1 + \bar{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $2x_1 + 2\bar{n} = x_1 + x_2$, откуда $x_1 + 2\bar{n} = x_2$, то есть $x_2 \in G_1$.

Аналогично показываем $y \notin G_2$.