Логика предикатов
лекция 13

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2020

`lbekl@yandex.ru`

20.11.2020

Элементарная теория модели

Пусть St_Σ — множество предложений сигнатуры Σ

Опр.

Элементарная теория модели M есть множество $Th(M) \rightleftharpoons \{A \in St_\Sigma : M \vDash A\}$.

Элементарная эквивалентность

Опр.

Модели M и N сигнатуры Σ *элементарно эквивалентны* ($M \equiv N$), если в M и в N истинны одни и те же предложения Σ, т.е. если $Th(M) \equiv Th(N)$.

Утверждение.

$M \cong N$ *влечёт* $M \equiv N$. *Обратное, вообще говоря, неверно.*

Подмодели

Опр.

$(N; \Sigma)$ есть *подмодель* модели $(M; \Sigma)$, если $N \subseteq M$ и для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$, $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ имеем $P_N = P_M \upharpoonright N$, $c_M \in N$, N замкнуто относительно f_M, $f_N = f_M \upharpoonright N$ и $c_N = c_M$.

Пример.

Если $(G; \cdot, 1, x^{-1})$ — группа, то подмодели G суть подгруппы группы G. Если же G рассматривается как модель $(G; \cdot, 1)$, то её подмоделями будут подполугруппы с единицей группы G.

Элементарные подмодели

Опр.

Подмодель $(N;\Sigma)$ модели $(M;\Sigma)$ *элементарна* (обозначение $N \preccurlyeq M$), если для всех $A \in \mathrm{Fm}_\Sigma$

$$\forall \vec{x} \in N\,(N \vDash A[\vec{x}] \iff M \vDash A[\vec{x}]).$$

Утверждение.

$N \preccurlyeq M$ *влечёт* $N \equiv M$.

Пример.

Если M — нестандартная модель $Th(\mathbb{N})$, то $\mathbb{N} \preccurlyeq M$.

Теорема Лёвенгейма–Сколема

Пусть Σ — счётная сигнатура с равенством.

Теорема.

Всякая нормальная модель $(M;\Sigma)$ имеет (конечную или) счётную элементарную подмодель.

Следствие.

Всякая непротиворечивая теория в счётной сигнатуре имеет (конечную или) счётную модель.

Замечание. Случай сигнатуры без равенства сводится к случаю сигнатуры с равенством.

Следствия

- Существуют счётные модели $Th(\mathbb{R})$ и $Th(\mathbb{C})$.
- Существует счётная модель элементарной геометрии.
- Если теория множеств ZFC непротиворечива, то существует и счётная модель ZFC.

Доказательство.

Построим последовательность счётных подмножеств M

$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$

такую, что

- N_0 — непустое счётное подмножество M.
- Для каждой формулы $A[a, \vec{b}]$ и набора $\vec{y} \in N_k$, если $M \vDash \exists v A[v, \vec{y}]$ выберем $x \in M$ такой, что $M \vDash A[x, \vec{y}]$. Добавим все такие x к N_k и получим N_{k+1}.

Положим $N \rightleftharpoons \bigcup_{k \geq 0} N_k$.

Лемма.
Для любой формулы A и всех $\vec{y} \in N$

$M \vDash \exists v A[v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \;\; M \vDash A[x, \vec{y}]$.

Лемма.
N есть подмодель M.

Доказательство.
Пусть $\vec{x} \in N$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$. Поскольку $M \vDash \exists v\, f(\vec{x}) = v$, имеем $y \in N$ такой, что $M \vDash f(\vec{x}) = y$, т.е. $f_M(\vec{x}) \in N$.

Индукцией по построению A теперь покажем
$$\forall \vec{y} \in N \, (N \vDash A[\vec{y}] \iff M \vDash A[\vec{y}]).$$

- Для атомарных формул A следует из того, что N — подмодель M.
- Для $A = \neg B,\ B \wedge C,\ B \vee C$ вытекает из предположения индукции.
- Допустим $A = \exists v B[a/v]$. Тогда
$M \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \;\; M \vDash B[x, \vec{y}]$
$\iff \exists x \in N \;\; N \vDash B[x, \vec{y}] \iff N \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}]$.

Обобщение о понижении мощности

Теорема.

Пусть $(M; \Sigma)$ *— бесконечная модель в счётной сигнатуре и* $\lambda \leq |M|$ *— бесконечная мощность. Тогда найдётся подмодель* $N \preccurlyeq M$ *такая, что* $|N| = \lambda$*.*

Доказательство.

Та же конструкция, но начинаем с любого подмножества $N_0 \subseteq M$ мощности λ.

Теорема Мальцева о повышении мощности

Пусть Σ — счётная сигнатура с равенством.

Теорема.

Для любой бесконечной (нормальной) модели $(M; \Sigma)$ и мощности $\lambda \geq |M|$ найдётся модель $(N; \Sigma)$ такая, что $M \preccurlyeq N$ и $|N| = \lambda$.

Доказательство.

Возьмём $X \supseteq M$, $|X| = \lambda$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma_X \rightleftharpoons \Sigma \cup \{\underline{c} : c \in X\}$ и теорию $T := Th(M; \Sigma_M) \cup \{\underline{c} \neq \underline{d} : c, d \in X, c \neq d\}$.

Каждая конечная подтеория T совместна. По теореме о компактности T имеет нормальную модель N. Но функция $\varphi : c \longmapsto (\underline{c})_N$ инъективна в силу аксиом T, следовательно $|N| \geq |X| = \lambda$. Т.к. $N \vDash Th(M; \Sigma_M)$, то $\varphi(M)$ есть подмодель N, изоморфная M и $\varphi(M) \preccurlyeq N$.

Следствие.

Если теория T имеет бесконечную модель, то T имеет модели любой бесконечной мощности.

Следствие.

Множество $Th(\mathbb{N})$ всех предложений истинных в стандартной модели арифметики имеет модели любой бесконечной мощности.

Вычислимость. Неформальное представление об алгоритмах.

- *Алгоритм* есть предписание выполнить точно определённую последовательность действий.
- Для данного алгоритма $\mathcal{A}$ определены:
  - *область возможных исходных данных X*;
  - *область возможных значений Y.*

  В качестве данных обычно рассматриваются слова $X = \Sigma^*$, где Σ — конечный алфавит, или числа $X = \mathbb{N}^n$.

Выполнение алгоритма

- Процесс применения алгоритма $\mathcal{A}$ к данным $x \in X$ происходит по шагам.
- Процесс или заканчивается после конечного числа шагов с результатом $y \in Y$, или останавливается без результата или продолжается бесконечно.
- Таким образом, с алгоритмом $\mathcal{A}$ связывается *частичная функция* $f : X \to Y$.

Частичные функции

Опр.

Частичной функцией $f : X \to Y$ называется подмножество $f \subseteq X \times Y$ такое, что из $\langle x, y_1 \rangle \in f$ и $\langle x, y_2 \rangle \in f$ следует $y_1 = y_2$.

Опр.

Пишем $f(x) = y$ вместо $\langle x, y \rangle \in f$;

$!f(x)$ вместо $\exists y\, f(x) = y$.

Опр.

Областью определения частичной функции f называется множество $dom(f) \rightleftharpoons \{x \in X : \exists y \in Y\ \langle x, y \rangle \in f\}$.

Опр.

Областью значений частичной функции f называется множество $rng(f) \rightleftharpoons \{y \in Y : \exists x \in X\ \langle x, y \rangle \in f\}$.

Вычислимые функции

Опр.

Частичная функция $f : X \to Y$ *вычислима*, если она вычисляется некоторым алгоритмом.

В частности, можно говорить о вычислимых функциях $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и т.д.

Вычислительные модели

- Машины Тьюринга (А. Тьюринг, Э. Пост)
- Частично рекурсивные функции (К. Гёдель, С. Клини)
- Лямбда-исчисление (А. Чёрч)
- Алгорифмы Маркова
- Машины с неограниченными регистрами
- Pascal, C, Java, Lisp, ...

Эквивалентность вычислительных моделей

Теорема.

Каждая из вышеперечисленных моделей определяет один и тот же класс вычислимых частичных функций $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.

Тезис Чёрча–Тьюринга

Тезис: Любая вычислимая в интуитивном смысле частичная функция $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ вычислима на машине Тьюринга.

Замечание.
Это утверждение не является математическим, но говорит об адекватности математической модели (вычислимости по Тьюрингу) *реальному* явлению (вычислимости).

Подтверждения тезиса Чёрча–Тьюринга

Все попытки построения более общих вычислительных моделей неизбежно приводили к тому же самому классу вычислимых функций.

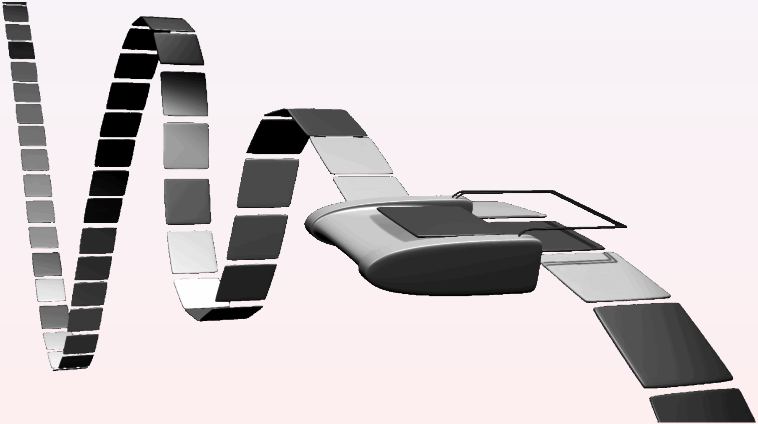
Физический тезис Чёрча–Тьюринга

Текущему уровню знаний не противоречит и более сильный

Тезис: Всякая функция $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, вычислимая на (идеализированном) *физически реализуемом* устройстве, вычислима на машине Тьюринга.

Замечание.
Физический тезис предполагает возможность аналогового вычисления, квантово–механические эффекты и т.д.

Машина Тьюринга



Машины Тьюринга

Опр.

Машина Тьюринга задаётся конечными

- рабочим алфавитом Σ, содержащим символ $\#$ (пробел);
- множеством состояний Q, содержащим состояния q_1 (начальное) и q_0 (конечное);
- набором команд (программой) P.

Команды

- Команды имеют вид $qa \to rb\nu$, где $q, r \in Q$, $a, b \in \Sigma$ и $\nu \in \{L, N, R\}$.

  «прочтя символ a в состоянии q перейти в состояние r, заменить содержимое ячейки на b и сместиться влево (L), остаться на месте (N) или сместиться вправо (R) на одну ячейку, в зависимости от значения ν»

- Требуется, чтобы в программе P была ровно одна команда с левой частью qa для каждого $q \in Q \setminus \{q_0\}$ и $a \in \Sigma$.

Соглашение: команды вида $qa \to qaN$, приводящие к зацикливанию, можно не указывать.

Опр.

Машина Тьюринга есть набор $M = \langle Q, \Sigma, P, q_0, q_1 \rangle$.

Пример.

Пусть $\Sigma = \{\#, 0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1\}$, а P состоит из следующих команд:

$$\begin{array}{rcl} q_1\# & \mapsto & q_1\#R \\ q_1 0 & \mapsto & q_1 1R \\ q_1 1 & \mapsto & q_1 0R \end{array}$$

Что делает эта машина Тьюринга?

Модифицируем программу.

Пусть $\Sigma = \{\#, 0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, а P состоит из следующих команд:

$$
\begin{array}{rcl}
q_1\# & \mapsto & q_1\#R \\
q_10 & \mapsto & q_21R \\
q_11 & \mapsto & q_20R \\
q_20 & \mapsto & q_21R \\
q_21 & \mapsto & q_20R \\
q_2\# & \mapsto & q_0\#N
\end{array}
$$