

Вычислимость
лекция 14

Лев Дмитриевич Беклемишев
<http://lpcs.math.msu.su/vml2020>

lbek1@yandex.ru

4.12.2020

Машины Тьюринга

Опр.

Машина Тьюринга задаётся конечными

- рабочим алфавитом Σ , содержащим символ $\#$ (пробел);
- множеством состояний Q , содержащим состояния q_1 (начальное) и q_0 (конечное);
- набором команд (программой) P .

Команды

- Команды имеют вид $qa \rightarrow rbv$, где $q, r \in Q$, $a, b \in \Sigma$ и $v \in \{L, N, R\}$.

«прочтя символ a в состоянии q перейти в состояние r , заменить содержимое ячейки на b и сместиться влево (L), остаться на месте (N) или сместиться вправо (R) на одну ячейку, в зависимости от значения v »

- Требуется, чтобы в программе P была ровно одна команда с левой частью qa для каждого $q \in Q \setminus \{q_0\}$ и $a \in \Sigma$.

Соглашение: команды вида $qa \rightarrow qaN$, приводящие к закливанию, можно не указывать.

Конфигурации

Предположение: лента содержит лишь конечное число символов, отличных от #.

Опр.

Конфигурация машины M определяется содержимым ленты, состоянием и положением головки. Конфигурация записывается словом вида $XqaY$, где

- $XaY \in \Sigma^*$ есть содержимое ленты,
- $q \in Q$ есть состояние M ,
- головка обозревает символ a .

Пусть $\Delta \subset \Sigma$ и $\# \notin \Delta$.

Опр.

M вычисляет частичную функцию $f : \Delta^+ \rightarrow \Delta^+$, если для каждого $x \in \Delta^+$

- если $x \notin \text{dom}(f)$, то начав работу в конфигурации q_1x , машина M не останавливается;
- если $x \in \text{dom}(f)$, то машина M останавливается, на ленте написано слово $y = f(x)$, слева и справа от него стоят символы не из Δ , а головка остановилась внутри y .

Обозначения

Опр.

$M_{\Delta}(x)$ есть результат работы M на слове $x \in \Delta^+$.

Опр.

$M_{\Delta} : \Delta^+ \rightarrow \Delta^+$ — частичная функция, вычислимая M .

Замечание.

M_{Δ} определена для любой машины M с рабочим алфавитом $\Sigma \supset \Delta$.

Пример.

Машина M вычисляет функцию $\text{neg} : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+$,
заменяющую в данном слове 0 на 1 и 1 на 0.

$$\begin{aligned}q_10 &\mapsto q_11R \\q_11 &\mapsto q_10R \\q_1\# &\mapsto q_0\#L\end{aligned}$$

Упражнения

Построить машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции над алфавитом $\{0, 1\}$:

- $f(x) = xx$ (копирование слова)
- $g(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \pmod{2}$
(сумма битов по модулю 2)

Вычислимые функции $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

Для $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ определим $\bar{f} : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+$:

$\bar{f}(x) = y$, если $x = 1^{n_1+1}0 \dots 01^{n_k+1}$ и $y = 1^{m+1}$ для некоторых $n_1, \dots, n_k, m \in \mathbb{N}$ и $f(n_1, \dots, n_k) = m$.

Опр.

$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ вычислима по Тьюрингу, если вычислима $\bar{f} : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+$.

Примеры

- Арифметические операции $+$ и \times вычислимы.
- Композиция вычисляемых функций вычислима.
- Многочлены с натуральными коэффициентами вычислимы.

Вычислимые биекции

Утверждение.

Существует вычислимая биекция $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$.

Канторовский пересчёт пар: $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \dots$

$c(x, y) :=$ номер пары $\langle x, y \rangle$

Подсчёт

Лемма.

$$c(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$$

Доказательство.

$$c(x, y) = n + x, \text{ где } n = 1 + 2 + \dots + (x + y - 1)$$

Обратные функции

Из биективности c однозначно определены функции l, r такие что $c(l(x), r(x)) = x$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

Также имеем $l(c(x, y)) = x, \quad r(c(x, y)) = y$.

Почему функции l и r вычислимы?

Кодирование кортежей длины n

Определим по индукции вычислимые биективные функции $c_n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}c_2(x_1, x_2) &:= c(x_1, x_2) \\c_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &:= c(c_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})\end{aligned}$$

Обратные функции π_i^n определяются равенствами:
 $c_n(\pi_1^n(x), \dots, \pi_n^n(x)) = x$ для всех $x \in \mathbb{N}$.

Кодирование кортежей конечной длины

Утверждение.

Существует вычислимая биекция $C : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$.

$C(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) := c(n, c_n(x_1, \dots, x_n))$.

В каком смысле можно говорить о вычислимости функции C ?

Кодирование слов в алфавите Σ

Утверждение.

Для любого непустого алфавита Σ существует вычислимая биекция $\Sigma^* \leftrightarrow \mathbb{N}$.

Доказательство.

Пусть $\Sigma = \{0, \dots, m-1\}$ и $m \geq 2$.

Сопоставим $\Lambda \mapsto 0$ и

$$a_1 a_2 \dots a_n \mapsto \sum_{i=1}^n (a_i + 1) m^{n-i}$$

Утверждение.

Всякое $x > 0$ однозначно представляется в виде

$$x = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)m + \cdots + (a_n + 1)m^n,$$

где $0 \leq a_i < m$ для всех i .

Доказательство.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n (a_i + 1)m^{n-i} = \sum_{i=1}^n a_i m^{n-i} + \sum_{i=1}^n m^i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i m^{n-i} + \frac{m^{n+1}-1}{m-1} \end{aligned}$$

Решение относительно a_1, \dots, a_n существует и единственно, если

$$0 \leq x - \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1} < m^{n+1}.$$

Это равносильно

$$\frac{m^{n+1} - 1}{m - 1} \leq x < \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1} + m^{n+1} = \frac{m^{n+2} - 1}{m - 1}.$$

Разрешимые множества

Опр.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ разрешимо, если вычислима характеристическая функция $\chi_A : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$, где

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Примеры

Разрешимы:

- множества \emptyset , \mathbb{N} ;
- конечные множества;
- множество чётных чисел;
- множество простых чисел;
- $\{\langle m, n \rangle : m \text{ и } n \text{ взаимно просты}\}$;

...

Свойства замкнутости

Утверждение.

Класс разрешимых подмножеств \mathbb{N} замкнут относительно булевых операций \cap , \cup , \setminus .

Разрешимые подмножества \mathbb{N} образуют булеву алгебру.

Перечислимые множества

Опр.

Частичной характеристической функцией $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называем $\chi_A^* : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$, где

$$\chi_A^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ \text{не определено,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема.

Для любого $A \subseteq \mathbb{N}$ следующие утв. равносильны:

- 1 функция χ_A^* вычислима;
- 2 $A = \text{dom}(f)$ для некоторой вычислимой f ;
- 3 $A = \text{rng}(f)$ для некоторой вычислимой f ;
- 4 $A = \emptyset$ или $A = \text{rng}(f)$ для некоторой вычислимой f такой что $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$;
- 5 $A = \{x : \exists y \langle x, y \rangle \in B\}$ для некоторого разрешимого $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Доказательство

Утверждения $1 \Rightarrow 2$ и $4 \Rightarrow 3$ очевидны.

$1 \Rightarrow 5$:

Пусть машина M_f вычисляет f . Рассмотрим

$$B \Rightarrow \{\langle x, y \rangle : M_f \text{ на входе } x \text{ ост. за } y \text{ шагов}\}.$$

Тогда $x \in \text{dom}(f) \iff \exists y \langle x, y \rangle \in B$ и B разрешимо.

5 \Rightarrow 4:

Допустим $A \neq \emptyset$, выберем $a_0 \in A$.

Определим $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} l(x), & \text{если } \langle l(x), r(x) \rangle \in B \\ a_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3 \Rightarrow 1:

Пусть M_f вычисляет f . Вычисляем $\chi_A^*(x)$ для данного x :

Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ выполним:

- сопоставим n пару $l = l(n)$ и $r = r(n)$;
- сделаем r шагов вычисления M_f на входе l ;
- если получен результат $y = x$, то выдаем ответ 1 и останавливаемся (иначе рассматриваем следующее n).

Свойства перечислимых множеств

Опр.

Множество A , удовлетворяющее любому из пунктов доказанной теоремы, называется *перечислимым*.

- Всякое разрешимое множество перечислимо.
- Класс перечислимых подмножеств \mathbb{N} замкнут относительно операций \cap , \cup .

Диофантовы уравнения

Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Утверждение.

Множество всех решений уравнения $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ в натуральных числах разрешимо (как подмножество \mathbb{N}^n).

Диофантовы множества

Опр.

Множество вида

$\{m \in \mathbb{N} : P(m, x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ имеет решение в } \mathbb{N}\}$ называется *диофантовым*.

Утверждение.

Всякое диофантово множество перечислимо.

Теорема Матиясевича

Теорема.

Всякое перечислимое множество диофантово.

Из этой теоремы вытекает решение 10-й проблемы Гильберта:

Следствие.

Множество всех диофантовых уравнений $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, которые имеют решение в \mathbb{N} , неразрешимо.

Доказательство: возьмем диофантово представление перечислимого неразрешимого множества.